

EXERCICE 1

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et Id l'application identité de E . L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation :

$$(*) : \quad f \circ f = 4 Id$$

A - Etude du cas $n = 2$

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est :
 $A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit u le vecteur de \mathbb{R}^2 défini par $u = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2})$.

1. Montrer que f vérifie (*), puis préciser le noyau et l'image de f .
2. On note $F = \text{Ker}(f - 2 Id)$ et $G = \text{Im}(f - 2 Id)$.
 - (a) Montrer que G est engendré par le vecteur u . En déduire la dimension de F et donner une base de F .
 - (b) Vérifier que G est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -2 .
3. Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B - Etude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation (*).

1. (a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f .
 (b) Déterminer les valeurs propres possibles de f .
 (c) Vérifier que $2Id$ et $-2Id$ satisfont l'équation (*).
 On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2Id$ et $f \neq -2Id$, et on note $F = \text{Ker}(f - 2 Id)$ et $G = \text{Im}(f - 2 Id)$.
2. (a) Montrer que $G \subset \text{Ker}(f + 2 Id)$ et que $\text{Im}(f + 2 Id) \subset F$.
 (b) Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f .
3. (a) Montrer que $G = \text{Ker}(f + 2 Id)$.
 (b) Montrer que f est diagonalisable.

EXERCICE 2

1. On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'intégrale : $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$.

- (a) Justifier que I_1 est divergente.
- (b) Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale I_n converge et vaut $\frac{1}{(n-1)^2}$.
- (c) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2}$ et donner sa limite en $+\infty$. ($\sqrt{e} \approx 1,65$)
- (d) En déduire grâce à I_2 que $\sum_{k \geq 2} \frac{\ln(k)}{k^2}$ converge (on ne cherchera pas à calculer cette série).

2. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{4 \ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

- (a) Montrer que g est une densité de probabilité. Dans toute la suite, on nommera X une variable aléatoire admettant g pour densité.
- (b) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$.
- (c) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X , notée G .

3. On note Z la variable aléatoire discrète définie par :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}, \quad Z = [X] \text{ partie entière de } X$$

- (a) Montrer que pour tout entier naturel k ,

$$\mathbb{P}(Z = k) = G(k+1) - G(k)$$

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(Z = k) = -(n+1)(1 - G(n+1)) + \sum_{k=0}^n (1 - G(k+1))$$

- (c) Montrer que $(1 - G(k))$ est équivalent en $+\infty$ à $\frac{2 \ln(k)}{k^2}$.
- (d) La variable Z admet-elle une espérance ?

EXERCICE 3

Dans cet exercice, les variables aléatoires sont toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si Z est une variable aléatoire réelle, $\mathbb{E}(Z)$ désigne son espérance.

On admet le résultat suivant (appelé **théorème de transfert**) :

Si Z est une variable aléatoire discrète, et si g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par Z , alors

$$\mathbb{E}(g(Z)) = \sum_{x \in Z(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(Z = x),$$

lorsque cette somme existe.

On considère ici une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$. On rappelle que : $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q$. On considère également $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X . On note : $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Soit s un réel donné. On définit une variable aléatoire Y par :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, Y(\omega) = e^{sX(\omega)}$$

où e représente la fonction exponentielle.

Par abus de notation, on pose $Y = e^{sX}$.

1. (a) Montrer que pour tout s réel, la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance $\mathbb{E}(e^{sX})$.
- (b) Déterminer la fonction $\varphi : s \mapsto \mathbb{E}(e^{sX})$.
2. (a) Préciser la loi de S_n .
- (b) Déterminer $\frac{S_n}{n}(\Omega)$ et la loi de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.
- (c) Soit s réel. Montrer que $\mathbb{E}\left(e^{s \frac{S_n}{n}}\right) = (\varphi(s/n))^n$.

Soit a un réel fixé de $]0, 1[$.

3. (a) On note $K_a = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket / \frac{k}{n} \geq a\}$. Soit s un réel positif. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(e^{s \frac{S_n}{n}}\right) \geq \sum_{k \in K_a} e^{s \frac{k}{n}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geq e^{as} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right)$$

- (b) Montrer que pour tout $s \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n e^{-as}$$

4. On suppose dans cette question que $a > p$.

- (a) Étudier sur \mathbb{R}^+ les variations de la fonction ℓ_a définie par

$$\ell_a : s \mapsto as - \ln \varphi(s)$$

- (b) Montrer que la fonction ℓ_a atteint sur \mathbb{R}^+ un maximum strictement positif $h(a, p)$ que l'on calculera en fonction de a et p .
- (c) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n \left(\sup_{t>0} (at - \ln \varphi(t))\right)} = e^{-nh(a, p)}$$

5. On suppose dans cette question que $a < p$ (donc $1 - a > 1 - p$).

- (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $n - S_n$.
- (b) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-n \left(\sup_{t<0} (at - \ln \varphi(t))\right)} = e^{-nh(1-a, 1-p)} = e^{-nh(a, p)}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$.

- (a) Dédurre des questions précédentes que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-nH(p, \varepsilon)}$$

avec $H(p, \varepsilon) = \min(h(p - \varepsilon, p), h(p + \varepsilon, p))$.

- (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$.