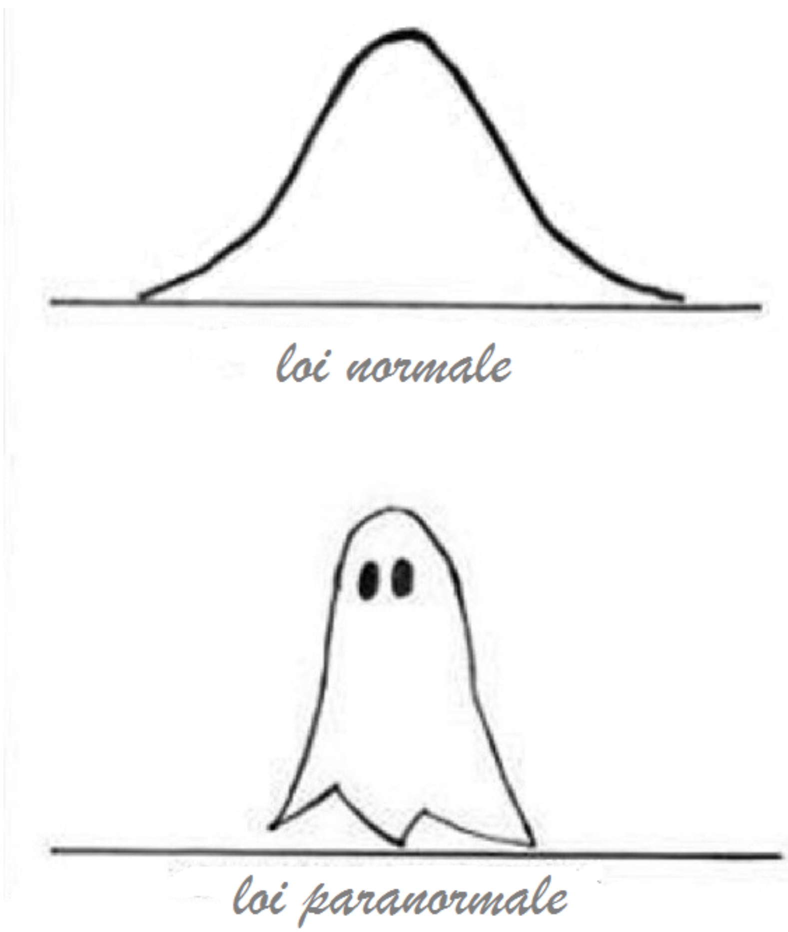
Khâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Jeudi 27 Février 2013 - 08h-12h



Le devoir comporte deux problèmes qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.
Le sujet est rédigé sur 5 pages, dont celle-ci.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

$\boxed{\text{Problème 1}}$

Dans tout le problème, n est un entier de $\mathbb{N}^*$ fixé. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, $\mathbb{R}[X]$ celui des polynômes à coefficients réels et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M^0 = I$, et pour tout entier naturel k non nul, on pose : $M^k = \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k \text{ fois}}$.
Si P n'est pas le polynôme nul, son degré est noté $\deg(P)$.
On rappelle le **théorème de la division euclidienne dans** $\mathbb{R}[X]$: *si A et B sont deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, B n'étant pas le polynôme nul, alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $A = BQ + R$ avec $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(B)$. De plus, si R est nul, on dit que le polynôme B divise le polynôme A.*

Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ s'écrivant $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit alors la matrice $P(M)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $P(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k M^k$. Par exemple, si $P(X) = X^3 - 5X + 2$, alors $P(M) = M^3 - 5M + 2I$.

On pourra utiliser sans justification les propriétés suivantes, valables pour tout couple (λ, μ) de réels, pour tout couple (P, Q) de polynômes et pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$(\lambda P + \mu Q)(M) = \lambda P(M) + \mu Q(M) \quad \text{et} \quad (P \times Q)(M) = P(M) \times Q(M).$$

On dit qu'un polynôme **non nul** P de $\mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si la matrice $P(M)$ est nulle.

Partie 1 - Polynôme annulateur d'une matrice carrée

1. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier p de $\mathbb{N}^*$ tel que la famille $(I, M, M^2, \ldots, M^p)$ soit une famille liée.
   (b) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins un polynôme annulateur de degré supérieur ou égal à 1.
2. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ comme polynôme annulateur.
   (a) Vérifier que $\mathcal{F}$ est non vide.
   (b) Déterminer les matrices A de $\mathcal{F}$ dans les deux cas suivants : $(A - I)$ inversible ; $(A - 2I)$ inversible.
   (c) Montrer que si A est une matrice de $\mathcal{F}$ telle que $(A - I)$ et $(A - 2I)$ sont non inversibles, alors A est semblable à une matrice diagonale que l'on déterminera.
3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont un polynôme annulateur est le polynôme $P(X) = X^2 - 5X + 6$.
   On considère un entier naturel m fixé et on désigne par Q_m et R_m respectivement, le quotient et le reste dans la division euclidienne de X^m par P.
   (a) Établir l'existence de deux suites réelles $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel m, on a : $R_m(X) = a_m X + b_m$.
   (b) En utilisant les racines de P, déterminer a_m et b_m en fonction de m.
   (c) En déduire l'expression de A^m en fonction de m, A et I.
   (d) On suppose dans cette question que le polynôme $S(X) = X^2 - 4X + 4$ est annulateur de A.
   On note encore Q_m et R_m respectivement, le quotient et le reste dans la division euclidienne de X^m par S. Déterminer l'expression de A^m en fonction de m, A et I (on pourra dériver la relation définissant Q_m et R_m).
4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A et V un vecteur-colonne propre de A associé à λ.
   (a) Établir, pour tout entier naturel m, la relation $A^m V = \lambda^m V$.
   (b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'égalité : $P(A)V = P(\lambda)V$.
   (c) On suppose que P est un polynôme annulateur de A. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de A est inclus dans l'ensemble des racines de P.

Partie 2 - Polynôme minimal d'une matrice carrée

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble des degrés des polynômes annulateurs de A possède, en tant que partie non vide de $\mathbb{N}^*$, un plus petit élément noté d.
   Établir, à l'aide d'une démonstration par l'absurde, l'existence d'un unique polynôme annulateur de A de degré d et de coefficient dominant égal à 1.

Ce polynôme s'appelle le ***polynôme minimal de la matrice*** *A et est noté μ_A.*

2. (a) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que si le polynôme μ_A divise le polynôme P, alors P est un polynôme annulateur de A.
   (b) En utilisant le théorème de la division euclidienne, montrer réciproquement que μ_A divise tout polynôme annulateur de A.
   (c) Déduire de ce qui précède une caractérisation des polynômes annulateurs de A.
3. (a) Montrer, à l'aide d'une démonstration par l'absurde, que toute racine de μ_A est valeur propre de A.
   (b) Utiliser la question I.4.(c) pour établir que les valeurs propres de A sont exactement les racines de μ_A.
4. (a) Établir pour toute matrice inversible R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, l'égalité matricielle suivante :
   $$Q(R^{-1}AR) = R^{-1}Q(A)R,$$
   (on pourra écrire $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$).
   (b) En déduire que deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

Partie 3 - Quelques exemples

1. (a) Quel est le polynôme minimal de la matrice nulle ?
   (b) Quel est le polynôme minimal de la matrice identité ?
   (c) Soit p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice p, c'est-à-dire vérifiant $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Déterminer le polynôme minimal de A.
2. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $(A - I)^2$.
   (b) En déduire, en utilisant la question II.2.(b), le polynôme minimal de A.
   (c) Déterminer les valeurs propres de la matrice A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que le polynôme $X^2(X+1)$ est un polynôme annulateur de A.
   (b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de A est l'ensemble $\{-1, 0\}$.
   (c) Vérifier que le polynôme minimal de A est $X^2(X+1)$.
   (d) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Problème 2

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 - Taux de panne associé à une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est inclus dans $\mathbb{N}$ et vérifiant, pour tout n de $X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \neq 0$.
On appelle **taux de panne associé à** X, la suite réelle $(x_n)_{n\in X(\Omega)}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } X(\Omega), \quad x_n = \mathbb{P}_{(X\geqslant n)}(X = n).$$

1. Vérifier que, pour tout n de $X(\Omega)$, $x_n = \dfrac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geqslant n)}$.
2. (a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p $(0 < p < 1)$. La loi de X est donc donnée par : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = pq^{n-1}$, où $q = 1 - p$.
   Déterminer le taux de panne associé à X.
   (b) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p.
   On pose $Z = \inf(X, Y)$, c'est-à-dire que, pour tout élément ω de Ω, on a : $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.
   On admet que Z est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
      i. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$.
      ii. Déterminer la loi de Z. Reconnaître la loi de Z et en déduire le taux de panne associé à Z.
3. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente. On note S la somme de cette série.
   (b) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on ait : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
   (c) En déduire la valeur de S.
   (d) On considère une variable aléatoire X dont la loi est donné par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   Déterminer le taux de panne associé à X.
4. Dans cette question, x désigne un réel fixé, et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel t, $\varphi(t) = e^{-xt}$.
   On pose, pour tout entier naturel n, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n \varphi(t)dt$.
   (a) Exprimer $I_n(x)$ en fonction de n, x et $I_{n+1}(x)$.
   (b) En déduire que, pour tout x réel, $I_n(x) \sim \dfrac{e^{-x}}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout couple de réels (a, b), l'égalité :

   $$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

   où, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(a)$ désigne la dérivée k-ième de f au point a et $f^{(0)}(a) = f(a)$.
   (d) En appliquant la formule précédente à la fonction φ sur un intervalle bien choisi, établir l'égalité

   $$\frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x) = e^{-x}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right).$$

   (e) Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ strictement positif.
   Déterminer la limite du taux de panne (x_n) associé à X quand n tend vers $+\infty$.

Partie 2 - Taux de panne associé à une variable aléatoire à densité

Dans cette partie, on suppose que les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et à densité continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Soit X une variable aléatoire vérifiant, pour tout réel x strictement positif, $\mathbb{P}(X > x) \neq 0$.
   On note F et f respectivement, la fonction de répartition de X et une densité de X.
   On pose, pour tout couple (x, h) de réels strictement positifs : $\lambda(x,h) = \dfrac{\mathbb{P}_{(X>x)}(X \leqslant x+h)}{h}$.
   (a) Établir la relation $\lambda(x,h) = \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h(1-F(x))}$.
   (b) Montrer que, pour x fixé strictement positif, $\lambda(x,h)$ admet une limite, notée $\lambda(x)$, lorsque h tend vers 0 par valeurs positives.
   (c) Établir, pour tout réel x strictement positif, la formule $\lambda(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$.

   *La fonction $\lambda : x \mapsto \lambda(x)$ s'appelle le **taux de panne associé à** X*

2. Déterminer le taux de panne associé à une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\ell > 0$, c'est-à-dire de densité f telle que :
$$f(x) = \begin{cases} \ell \times e^{-\ell x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Soit n un entier naturel non nul et n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes telles que, pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, X_j suit la loi exponentielle de paramètre $\ell_j > 0$.
   On pose $Z_n = \inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $Z_n(\omega) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i(\omega))$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Z_n et reconnaître la loi de Z_n.
   (b) En déduire le taux de panne associé à Z_n en fonction de $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$.

4. Soit n un entier naturel non nul et n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes. On note, pour tout j de $[\![1, n]\!]$, F_j, f_j, et λ_j respectivement, la fonction de répartition de X_j, une densité de X_j et le taux de panne associé à X_j.
   On pose $Z_n = \inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a : $Z_n(\omega) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i(\omega))$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition G de Z_n en fonction de $F_1, F_2, \ldots, F_n$.
   (b) En déduire le taux de panne associé à Z_n en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

5. Soit X une variable aléatoire à densité strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et nulle sur $\mathbb{R}^-$, et de taux de panne associé λ_X.
   (a) Pour tout réel strictement positif t, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda_X(u)du$, puis montrer que la seule connaissance du taux de panne λ_X permet de déterminer la fonction de répartition F de X.
   (b) Déterminer les variables aléatoires dont les taux de panne associés sont constants.
   (c) Soit Y une variable aléatoire à densité strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et nulle sur $\mathbb{R}^-$, de taux de panne associé λ_Y. On suppose que, pour tout réel t strictement positif, on a l'égalité suivante : $\lambda_X(t) = 2\lambda_Y(t)$.
   Soient x et y deux réels strictement positifs vérifiant $x < y$.
   Montrer que $\mathbb{P}_{(X>x)}(X > y)$ est le carré de $\mathbb{P}_{(Y>x)}(Y > y)$.