Le devoir comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.. Le sujet est rédigé sur deux pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$. On s'intéresse dans cet exercice aux successions de lancers amenant un même côté de la pièce.
On dit que "la première série est de longueur n" si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté.
De même, la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série (si cette série s'achève) et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.

On désigne par Ω l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.
Pour tous i, k, n entiers strictement positifs, on note les événements :

- P_i : "le i-ième lancer amène Pile" et $F_i = \overline{P_i}$
- L_n^1 : "la première série est de longueur n"
- L_k^2 : "la deuxième série est de longueur k".

1. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(L_n^1) = p^n q + q^n p$.
   (b) Vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_n^1) = 1$. Comment interpréter ce résultat ?
   (c) Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}(L_n^1)$ converge et calculer sa somme.
2. (a) Pour tous entiers n et k de $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(L_n^1 \cap L_k^2)$.
   (b) En déduire pour $k \geqslant 1$ la valeur de $\mathbb{P}(L_k^2)$.
   (c) Déterminer $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_k^2)$. Comment interpréter ce résultat ?
   (d) Justifier que la série $\sum_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}(L_k^2)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2

On dispose de n urnes $U_1, \ldots, U_n$ contenant chacune trois boules. Parmi ces $3n$ boules, l'une est jaune et toutes les autres sont bleues. On ignore dans quelle urne se trouve la boule jaune.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On tire sans remise deux boules de l'urne U_k.
   (a) On note les événements B_k "les deux boules tirées dans l'urne U_k sont bleues" et J_k "la boule jaune est dans l'urne U_k".
   Calculer $\mathbb{P}_{J_k}(B_k)$ et $\mathbb{P}_{\overline{J_k}}(B_k)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(B_k)$.
   (b) Quelle est la probabilité que la boule jaune soit dans l'urne U_k sachant que le tirage dans cette urne a donné deux bleues ?
2. On tire dans chacune des urnes $U_1, \ldots, U_n$ deux boules sans remise. On note toujours pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ les événements B_k et J_k définis comme dans la question 1.
   (a) Pour $i, j, k \in [\![1, n]\!]$, déterminer la valeur de $\mathbb{P}_{J_k}(B_i \cap B_j)$ *(on distinguera les cas où $k \in \{i, j\}$ et $k \notin \{i, j\}$).*
   En déduire $\mathbb{P}(B_i \cap B_j)$.
   (b) Les événements B_i et B_j pour $i \neq j$ sont-ils indépendants pour toute valeur de n ?
   (c) Calculer $\mathbb{P}(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_r})$ où $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$.

Exercice 3

Qui, des deux délégués de la Khâgne B/L, est le véritable leader charismatique de cette classe ?
C'est un vrai débat entre les 43 élèves de la 913. Quel critère choisir ? Un critère culinaire : qui préparera la meilleure omelette ? Un critère sportif : qui est le meilleur au triple saut ? Un critère culturel : qui connaît le mieux le répertoire de Justin Bieber ? Ni Clément, ni Lorène n'arrive à faire l'unaminité.
Au début, c'était un débat, c'est devenu une querelle, puis un conflit, maintenant c'est la guerre.
Heureusement, votre professeur est là et trouve le moyen de les départager. Puisque c'est de saison, on organise un duel de boules de neige.
Voici les règles : chacun tire sa boule l'un après l'autre en direction de son adversaire et le vainqueur est le premier qui touche sa cible en plein visage et il est alors désigné Guide Suprême de la 913 pour l'année.
La galanterie a désigné Lorène pour le premier lancer de boule.
A chaque tir, Lorène a une probabilité p $(0 < p < 1)$ de toucher son ennemi, tandis que Clément a une probabilité égale à q $(0 < q < 1)$ de toucher son adversaire.
Bien sûr, chaque tir est indépendant des précédents.
On considère, pour $k \in \mathbb{N}^*$ les événements suivants :

- L_k : "Lorène tire et touche son ennemi au k-ième lancer".
- C_k : "Clément tire et touche son ennemie au k-ième lancer".

1. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, calculer $\mathbb{P}(L_{2n})$ et $\mathbb{P}(C_{2n-1})$.
   (b) Calculer en fonction de p et q la probabilité des événements L_1, C_2, L_3.
   (c) Déterminer pour tout $n \geqslant 1$ les probabilités des événements L_{2n-1} et C_{2n}.
2. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on note LG_n l'événement "Lorène gagne avant le $(2n)$-ième lancer de boule". Déterminer $\mathbb{P}(LG_n)$ en fonction de p, q et n.
   (b) Soit L l'événement "Lorène est désignée Guide Suprême de la 913 pour l'année". Déduire la question précédente la probabilité de $\mathbb{P}(L)$.
3. (a) En vous inspirant de la question 2, déterminer $\mathbb{P}(C)$ où C est l'événement "Clément est désigné Guide Suprême de la 913 pour l'année".
   (b) Vérifier que le duel s'arrêtera un jour presque-sûrement.
4. On sait que Lorène a gagné. Quelle est la probabilité que ce soit sur son premier lancer ?
5. Montrer que, pour que Clément ait plus de chance de gagner que Lorène, Clément doit être plus précis dans son tir que Lorène. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4

On lance indéfiniment une pièce de monnaie qui donne Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose l'expérience modélisée par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement "au cours des $2n$ premiers lancers, on obtient autant de Pile que de Face".

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2)$, puis $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \binom{2n}{n}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant 4^n$.
3. En déduire que si $p \neq \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge.
4. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ et $S = \bigcap_{n=0}^{+\infty} J_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$.
   Justifier que S est réalisé si et seulement si une infinité d'événements A_n sont réalisés.
5. On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \mathbb{P}(J_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$.
   En déduire que $\mathbb{P}(S) = 0$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?
6. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{4^n}{4n}$. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, puis que $\mathbb{P}(S) = 1$.
   Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?