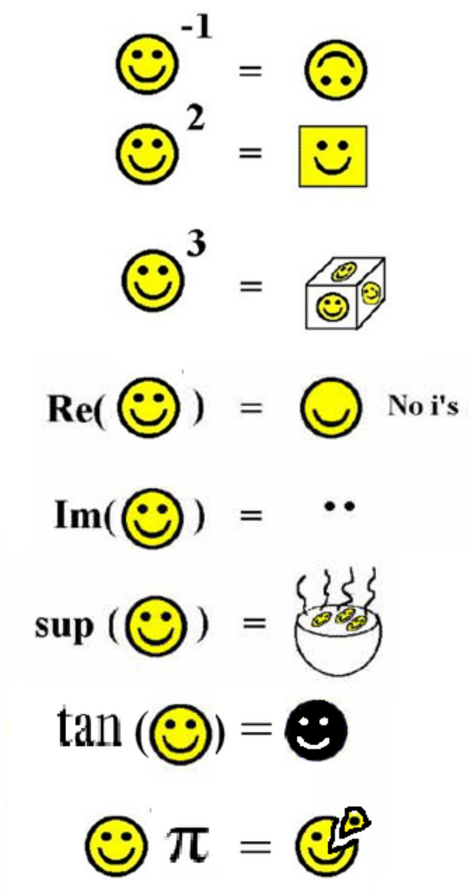
Lycée du Parc 2013-2014

Khâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Lundi 04 Novembre 2013 - 08h-12h



Le devoir comporte deux problèmes qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.
Le sujet est rédigé sur 5 pages, dont celle-ci.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1

Notations

Si p et q sont des entiers naturels, on note $\displaystyle\binom{p}{q} = \begin{cases} \dfrac{p!}{q!(p-q)!} & \text{si } q \in [\![0,p]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour n entier naturel non nul, on note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n.

On note, pour k dans $[\![0,n]\!]$, P_k la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_k(x) = x^k$$

On rappelle que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ forme une base de E_n.

Les parties 3 et 4 de ce problème sont indépendantes.

Les résultats de la partie 1 sont utilisés en fin de partie 3.

Partie 1 - Un résultat préliminaire

1. Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur une partie X de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. On explicitera $f^{-1}(x)$ pour $x \in X$.

Partie 2 - Définition d'un endomorphisme

Si P appartient à E_n, on pose, pour x réel non nul, $u(P)(x) = x^n P\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

2. *Exemple :* dans cette question seulement, on prend $n = 2$.
   (a) Pour P dans E_2 défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, exprimer, pour x réel non nul, $u(P)(x)$ sous la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec α, β et γ réels que l'on exprimera en fonction de a, b et c.
   (b) Quelle valeur faut-il donner à $u(P)(0)$ pour que $u(P)$ soit dans E_2 ?

On revient au cas général : n est de nouveau un entier naturel non nul quelconque.

3. Soit P dans E_n ; on pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P_k$.

   Ainsi : pour tout x réel, $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (où $a_0, \ldots, a_n$ sont les coefficients réels de P).

   Déterminer la limite, notée ℓ, de $u(P)(x)$ lorsque x tend vers 0. Dans la suite de ce problème, on posera $u(P)(0) = \ell$ et on admettra qu'alors $u(P)$ est dans E_n.
4. Montrer que u est un endomorphisme de E_n.

Partie 3 - Étude de la bijectivité de l'endomorphisme u

On notera M_n la matrice u dans la base $\mathcal{B}$.

5. *Exemple :* montrer que $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et justifier que M_3 est inversible en cherchant à déterminer son inverse M_3^{-1} que l'on explicitera.

On revient au cas général (n entier naturel non nul quelconque).

6. Déterminer le noyau de u et en déduire que u est bijectif.
7. On pose pour x réel et k entier dans $[\![0, n]\!]$,
$$Q_k(x) = (x+1)^k x^{n-k}.$$
En utilisant la question précédente, justifier que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de E_n.
8. Exprimer, pour j dans $[\![1, n+1]\!]$, $u(P_{j-1})$ à l'aide de $P_{n-j+1}, P_{n-j+2}, \ldots, P_n$.
9. En déduire, pour i et j dans $[\![1, n+1]\!]$, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M_n.
10. Déterminer, pour x réel différent de 1 et P dans E_n, $u(P)\left(f^{-1}(x)\right)$.
11. En déduire u^{-1}.
12. Déterminer M_n^{-1} (on donnera, pour i et j dans $[\![1, n+1]\!]$, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M_n^{-1}).

Partie 4 - Étude du spectre de u

13. Déterminer les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Dans la suite, on notera ω_1 (resp. ω_2) la racine positive (resp. négative) de cette équation.
14. Montrer que si x est réel, $1 + x - \omega_2 x = -\omega_1\omega_2 + \omega_1 x$.
Calculer de même $1 + x - \omega_1 x$.
15. En déduire que le polynôme V_k défini, pour k dans $[\![0, n]\!]$ et x réel, par
$$V_k(x) = (x - \omega_1)^k (x - \omega_2)^{n-k}$$
est vecteur propre de u associé à une valeur propre que l'on exprimera à l'aide de n, k et ω_1 seulement.
16. Exprimer V_k à l'aide de Q_k (voir question 7) et en déduire que $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ est une base de E_n.
17. Que peut-on en déduire ?
18. Montrer que les valeurs propres de u trouvées question 15 sont distinctes deux à deux. En déduire une nouvelle preuve du fait que $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ est une base de E_n.
19. *Exemples* : diagonaliser M_1 et M_2. On s'attachera, pour chaque valeur propre, à donner un vecteur propre de dernière composante 1.

Problème 2

Les parties 1, 2, 3, 4 sont indépendantes. La partie 5 utilise les résultats des parties 1,2,3,4.

Partie 1

1. (a) Montrer que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente.

   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente si et seulement si le réel x est strictement positif.

   (c) En déduire que la fonction Γ, définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Établir, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. (a) Calculer $\Gamma(1)$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Partie 2

4. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est convergente si et seulement si les réels x et y sont strictement positifs.
   On définit alors la fonction B par : pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$,
   $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

5. Montrer, pour tout couple (x,y) de réels strictement positifs, l'inégalité suivante : $B(x,y) > 0$.

6. Établir, pour tout couple (x,y) de réels strictement positifs, les deux égalités suivantes :

   (a) $B(x,y) = B(y,x)$.

   (b) $B(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}B(x,y)$.

7. En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}$ et pour tout réel x strictement positif, on a :
   $$B(n+1,x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Partie 3

On définit les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$u_n = -\ln(n) + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

8. Écrire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction h définie par :
   $$h(x) = x(1+x)^{-1} - \ln(1+x)$$

9. En déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

10. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

11. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note γ sa limite.

Partie 4

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

12. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, on a : $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n e^t \leqslant 1$.

13. (a) Montrer, pour tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$ que l'on a : $\ln\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right) \leqslant t + n\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)$.

    (b) En déduire pour tout réel t de l'intervalle $[0, \sqrt{n}]$, l'inégalité suivante : $1 - \dfrac{t^2}{n} \leqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n e^t$.

14. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, on obtient l'encadrement suivant : $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

Partie 5

15. À l'aide de la partie précédente, déterminer, pour tout entier naturel n non nul, un encadrement de $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

16. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

17. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer l'égalité suivante :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x B(n+1, x)$$

    (b) En déduire, pour tout réel x strictement positif, la formule suivante :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

18. On rappelle que γ désigne la limite de la suite (u_n) définie dans la partie 3.
Montrer alors, pour tout réel x strictement positif, la formule suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$$

où l'on a posé $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right] = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$.