*Le devoir comporte deux exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.. Le sujet est rédigé sur une seule page. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.*

---

# Exercice 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A$ est diagonalisable et déterminer une matrice inversible $P$ telle que $A = PDP^{-1}$.
2. On note $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MD\}$.
   (a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Montrer que $M \in E \iff z = 0$ et $y = t$.
   (c) Montrer que $(U, A)$ est une base de $E$.
   (d) Calculer le produit $UA$. Est-ce que $UA$ est un élément de $E$ ?
3. On note $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie par :
   $$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ f(M) = AM - MD$$
   (a) Montrer que $f$ est linéaire.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et le rang de $f$.
   (c) Déterminer les matrices $M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$.
   (d) Montrer que 1 et $-1$ sont des valeurs propres de $f$. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?
   (e) Montrer que $f \circ f \circ f = f$.

# Exercice 2

Dans cet exercice, $f$ désigne un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On se propose d'étudier quelques situations dans lesquelles on peut établir que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

1. (a) Montrer que si $f$ est un automorphisme de $E$, alors on a bien $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
   (b) Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f \circ f = Id_E$.
   Justifier qu'on a $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Dans cette question, on suppose $f$ diagonalisable et $f$ non bijectif (le cas où $f$ est bijectif ayant été traité dans la première question).
   (a) Traiter le cas où $f$ est l'endomorphisme nul.
   (b) Dans cette question, on suppose que $f$ n'est pas l'endomorphisme nul.
      i. Montrer que $f$ a d'autres valeurs propres que la valeur propre 0.
      ii. Montrer que tout sous-espace propre de $f$ associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\mathrm{Im}(f)$.
      iii. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 2.b) en considérant la matrice de $f$ dans une base bien choisie.
3. Dans cette question, on suppose que $f$ vérifie $f \circ f = f$.
   (a) Déterminer les valeurs propres possibles de $f$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - Id)$.
   (c) Etablir que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
4. Dans cette question, on considère un endomorphisme $f$ de $E$ et on suppose qu'il existe $p$ réels ($p \geqslant 1$) $a_1, a_2, \ldots, a_p$ tels que :
   $$a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_p f^p = 0 \quad \text{avec } a_1 \neq 0$$
   (a) Soit $y$ un élément de $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.
      i. Montrer qu'il existe un vecteur $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$ et $f^2(x) = 0$.
      ii. En déduire que, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, on a $f^k(x) = 0$ puis déterminer $y$.
   (b) Établir que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.