Le devoir comporte un exercice et deux problèmes indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat..

Le sujet est rédigé sur 3 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Cadeaux

On admettra si besoin les résultats suivants :

- **Inégalité des accroissements finis**.
  Soit f une fonction continue et dérivable sur I telle que pour tout t de l'intervalle I, on a $|f'(t)| \leqslant M$, où M est une constante réelle. Alors pour tous x et y de l'intervalle I, on a $|g(x)-g(y)| \leqslant M|x-y|$.

- **Equivalents usuels**.
  Lorsque $u \to 0$, on a $e^u - 1 \sim u$ et $\ln(1+u) \sim u$

- **Partie entière d'un réel**.
  Pour tout réel x, on appelle partie entière de x le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, c'est-à-dire l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

- **Zeta(2)**.
  La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge et que sa somme vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{e^{-t/n}}{1+t} dt$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$.
   Donner la limite de la suite (u_n).
2. Prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$.
3. Montrer à l'aide d'un changement de variable que pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+t} dt - u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$.
4. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 1

Partie 1

On considère les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définies par : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

1. (a) Etablir pout tout entier naturel k non nul, l'encadrement suivant :
   $$0 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$
   (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée.
2. (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et que sa limite notée γ appartient à $[0,1]$.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln(n) - H_{n+1})$.

Partie 2

Sous réserve de convergence, on pose

$$I_0 = \int_0^1 \ln(t)dt,$$

et pour tout entier k supérieur ou égal à 1,

$$I_k = \int_0^1 (1-t)^k \ln(t)dt.$$

3. (a) Montrer que l'intégrale définissant I_0 est convergente et donner sa valeur.
   (b) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 1, l'intégrale définissant I_k est convergente.
4. (a) Etablir pour tout entier k supérieur ou égal à 1 la relation suivante :
   $$I_k = I_{k-1} - \int_0^1 t(1-t)^{k-1} \ln(t)dt.$$
   (b) À l'aide d'une intégration par parties dont on justifiera la validité, montrer que l'on a :
   $$\int_0^1 t(1-t)^{k-1} \ln(t)dt = \frac{I_k}{k} + \frac{1}{k(k+1)}.$$
   (c) En déduire pour tout entier naturel n l'égalité suivante :
   $$(n+1)I_n = -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$
5. (a) Etablir pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :
   $$\frac{1}{n}\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = I_n + \frac{\ln(n)}{n+1}.$$
   (b) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt.$

Partie 3

On garde les notations des parties 1 et 2.
Sous réserve de convergence, on pose

$$J_0 = \int_0^1 \ln^2(t)dt,$$

et pour tout entier k supérieur ou égal à 1,

$$J_k = \int_0^1 (1-t)^k \ln^2(t)dt.$$

6. (a) Montrer que l'intégrale définissant J_0 est convergente et donner sa valeur.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel k non nul, l'intégrale définissant J_k est convergente.
7. (a) Etablir pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la relation suivante :
   $$J_k = J_{k-1} - \int_0^1 t(1-t)^{k-1} \ln^2(t)dt.$$
   (b) Montrer pour tout entier naturel k non nul, la relation suivante :
   $$(k+1)J_k - kJ_{k-1} = -2I_k.$$
   (c) En déduire les égalités suivantes pour tout entier naturel n,
   $$(n+1)J_n = 2\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{ki}, \qquad (n+1)J_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}.$$
8. (a) Etablir pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les égalités suivantes :
   $$\int_0^n \ln^2(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1}\ln^2(n) + 2n\ln(n)I_n + nJ_n,$$
   $$\frac{n+1}{n}\int_0^n \ln^2(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = (\ln(n)+(n+1)I_n)^2 - (n+1)^2 I_n^2 + (n+1)J_n.$$
   (b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln^2(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2.$

Problème 2

On considère dans ce problème une fonction g définie sur $[0,+\infty[$ vérifiant l'ensemble des hypothèses suivantes :

- g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$,
- $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) \in [0,+\infty[$,
- g est décroissante sur $[0,+\infty[$,
- La série $\sum_{k\geqslant 0} g(k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} g(x) = 1$,
- Il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad |g'(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2} \quad \text{et} \quad |g''(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2}$$

Pour tout réel x, on pose :

$$f(x) = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Prouver la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} g'(x+k)$.

   Quel est le signe de f ?

2. (a) Etablir que pour tout $(x,a) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|g'(x+k) - g'(a+k)| \leqslant \frac{C\,|x-a|}{(k+1)^2}.$$

   (b) Montrer qu'il existe un réel $D \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x,a) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant D|x-a|.$$

   (c) Justifier la continuité de f en tout réel a de $[0,+\infty[$.

3. Pour tout t réel positif et pour tout entier naturel N, on pose :

$$S_N(t) = -\sum_{k=0}^{N} g'(t+k) \qquad \text{et} \qquad R_N(t) = -\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k).$$

   (a) Démontrer que : pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad \frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}$$

   puis que :

$$\forall N \geqslant 0,\ \forall t \in \mathbb{R}+, \qquad |R_N(t)| \leqslant \frac{C}{N+1}.$$

   (b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f(t)dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)dt.$$

   (c) Justifier que $\lim_{k\to+\infty} \big(g(k)\big) = 0$ et que :

$$\int_0^1 f(t)dt = g(0).$$

4. (a) Vérifier que : pour tout $t \geqslant 0$, $\quad f(t+1) - f(t) = g'(t)$.

   (b) Vérifier que : pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

   (c) Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose :

$$S_N = \int_0^N f(t)dt.$$

   Etablir que :

$$\forall N \geqslant 1,\ S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k).$$

   puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ S_{\lfloor x\rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)dt \leqslant S_{\lfloor x\rfloor+1}$$

   où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

   (d) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et préciser sa valeur.

$***$ *Fin du sujet* $***$