Exercice 1

Soient a et b deux réels.
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = a(\text{Arctan}(x) + b)$

1. Déterminer a et b pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.
2. Dans ce cas, déterminer une densité de X.
3. Etudier l'existence et la valeur de $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 2

1. Soit k un réel. On pose :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x(x+1)} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Déterminer k pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X. Donner alors l'expression de la fonction de répartition de X.
   (b) La variable X admet-elle une espérance ?
2. On pose $Z = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Z.
3. On pote $T = \text{Ent}(X)$, où $\text{Ent}(X)$ désigne la partie entière de X.
   (a) Déterminer la loi de T.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$.
4. On pose $= X - \text{Ent}(X)$.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Montrer que pour tout entier $r \geqslant 1$, Y admet un moment d'ordre r.
   (c) Calculer l'espérance de Y.