Exercice 1

Les V.A.R. de cet exercice sont toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit λ un réel strictement positif donné et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 1\}$, de même loi définie par : $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \dfrac{1}{\lambda+1}$

1. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathbb{E}[X_n^2]$.
2. Calculer l'espérance et la variance de $U = X_0X_3 - X_1X_2$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $Y_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} X_i$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}[Y_n]$ en fonction de λ et de n.
   (b) En déduire la loi de Y_n.
4. Soit T une VAR suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les VAR T, $X_0, X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
   On pose $V = \displaystyle\prod_{i=0}^{T} X_i$, i.e. $\forall \omega \in \Omega,\ V(\omega) = \displaystyle\prod_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.
   (a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant l'événement $[T = n]$.
   (b) Calculer $S(n) = \displaystyle\sum_{k\in V(\Omega)} k\mathbb{P}_{[T=n]}(V = k)$.
   (c) Montrer que $\mathbb{E}[V] = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)S(n)$. En déduire que :
   $$\mathbb{E}[V] = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \exp\left(-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$$
5. (a) Déterminer pour tout i la loi de $Z_i = \dfrac{1}{2}X_i + \dfrac{1}{2}$.
   (b) En déduire la loi de la variable $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} X_i$, son espérance et sa variance.