Exercice 1

On considère une banque ayant un nombre infini de pièces telles que la probabilité d'obtenir Pile avec l'une quelconque d'entre elles est 2/3 et la probabilité d'obtenir Face est 1/3. Un joueur possède un certain nombre de pièces.
À chaque étape du jeu, le joueur lance toutes ses pièces. Pour chaque lancer d'une pièce, si le joueur obtient Face, il donne cette pièce à la banque et s'il obtient Pile, il conserve la pièce et la banque lui donne en outre une pièce supplémentaire.
On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces détenues par le joueur après la n-ième étape. Au départ, le joueur possède une pièce et on note $X_0 = 1$.

1. Donner la loi et l'espérance de X_1.
2. Donner la loi et l'espérance de X_2.
3. (a) Pour $n \geqslant 1$, déterminer $X_n(\Omega)$.
   (b) Soit $i \in X_n(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = i]$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction G_n par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} x^k \mathbb{P}(X_n = k)$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+1} = G_n \circ G_1$.
   (b) Donner les valeurs de $G_n(1)$ et $G_n'(1)$. En déduire une relation entre $\mathbb{E}[X_{n+1}]$ et $\mathbb{E}[X_n]$, puis donner l'espérance de X_n en fonction de n.
5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}(G_n(x))^2$.
   (b) Calculer la probabilité que le joueur finisse ruiné.