

Exercice 1

Deux joueurs A et B possèdent chacun une pièce truquée de manière similaire, faisant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec une probabilité $q = 1 - p$.

Ils réalisent chacun une succession de lancers avec leur pièce, indépendamment l'un de l'autre, et on note X (respectivement Y) le numéro du lancer où A (resp. B) obtient pour la première fois un Pile.

1. Rappeler la loi de X et Y , leurs espérances et variances.
2. On note $I = \inf(X, Y)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$$

Calculer $\mathbb{P}(I > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que I suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
4. Donner $\mathbb{E}[I]$ et $\mathbb{V}[I]$.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires qui suivent respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ .

On suppose que X et Y sont indépendantes (i.e. pour tous entiers k et ℓ , $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell)$).

On pose $Z = X + Y$.

1. Calculer $\mathbb{E}[Z]$.
2. Déterminer la loi de Z .