On dispose de deux boîtes A et B, de deux boules noires et de deux boules rouges. On place initialement deux boules dans chaque boîte au hasard.
On répète plusieurs fois la situation suivante : on tire une boule de l'urne A, on tire une boule de l'urne B et on place les deux boules dans l'autre urne (on procède à un échange).
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements :

- N_n : la boîte A ne contient que des boules noires après le n-ième échange.
- M_n : la boite A contient une boule noire et une boule rouge après le n-ième échange.
- R_n : la boîte A ne contient que des boules rouges après le n-ième échange.

(Par convention l'échange numéro 0 correspond à la répartition initiale des boules dans les urnes).

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(N_n) \\ \mathbb{P}(M_n) \\ \mathbb{P}(R_n) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les vecteurs X_0 et X_1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(N_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(N_n)$, $\mathbb{P}(M_n)$ et $\mathbb{P}(R_n)$.
3. Plus généralement, montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = CX_n$$
4. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ C^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$
5. En déduire que les suites $(\mathbb{P}(N_n))$, $(\mathbb{P}(M_n))$ et $(\mathbb{P}(R_n))$ convergent vers des limites notées respectivement α, β, γ.
6. Calculer les valeurs de α, β et γ.