Olivier Ribot se lève à l'aube pour chasser à l'arc. N'étant pas vraiment du matin, il lui faut décider s'il est en état ou non d'aller croiser le gibier, en s'échauffant plusieurs fois sur une cible fixe. A chaque tir, il a une probabilité p d'atteindre la cible fixe avec $p \in]0,1[$. Il effectue des tirs répétés et indépendants.
• Si O.Ribot atteint la cible deux fois de suite, alors il est fin prêt et peut partir à la chasse, le gibier va morfler.
• Si O.Ribot loupe la cible deux fois de suite, alors il retourne se recoucher, le gibier attendra.
• Etant d'humeur têtue, il tire sur la cible tant qu'il n'a pas décidé s'il allait chasser ou se recoucher.
Pour tout $n \geqslant 1$, on note les événements :

- C_n : O.Ribot atteint la cible au tir numéro n,
- G_n : O.Ribot part à la chasse à l'issue du n-ième tir,
- $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$,
- Z_n : O.Ribot ne sait toujours pas ce qu'il fait de sa matinée à l'issue du n-ième tir,
- Z : O.Ribot ne s'arrête jamais de tirer sur la cible,
- G : O.Ribot part à la chasse.

1. Calculer les probabilités de $C_1, G_1, Z_1, C_2, G_2, Z_2, C_3, G_3, Z_3$.
2. (a) Montrer que la suite (Z_n) est décroissante.
   (b) On pose $\forall n \geqslant 1$, $a_n = \mathbb{P}(Z_n)$. Vérifier que les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont géométriques de raison $(1-p)p$.
   (c) En déduire la probabilité de l'événement Z.
3. Montrer que la suite (A_n) est croissante. En déduire la probabilité de l'événement G.
4. (a) Montrer qu'il existe une et une seule valeur de p telle que les événements (C_1, C_2, C_3) soient indépendants deux à deux pour la probabilité $\mathbb{P}$.
   (b) Pour la valeur p déterminée en 4(a), les événements (C_1, C_2, C_3) sont-ils mutuellement indépendants ?