Exercice 1

Soit $n \geqslant 2$ et soient A et J les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ données par :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & \cdots & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer le rang de J.
   Quel réel est alors valeur propre de J ?
   (b) Soit Y la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer JY.
   (c) En déduire que J est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.
2. (a) Ecrire A en fonction de J et de I_n.
   (b) En déduire que : $\lambda \in Sp(A) \iff 2\lambda - 1 \in Sp(J)$.
   (c) En déduire les valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres correspondants.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f \circ f = f$$

1. Montrer que $Sp(f) \subset \{0, 1\}$
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - Id)$
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?