Exercice 1

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?
(On répondra sans calculer les éventuels sous-espaces propres)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit Φ l'application qui à tout polynôme réel P associe le polynôme $Q = \Phi(P) = (X-a)\,(P'(X) + P'(a)) - 2\,(P(X) - P(a))$, où a est un nombre réel donné.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$.
3. (a) Soit P un polynôme quelconque et $Q = \Phi(P)$. Calculer $Q(a)$, $Q'(a)$ et $Q''(a)$.

   (b) i. Soit λ une valeur propre non nulle de Φ s'il en existe, et P un polynôme propre associé. Montrer que a est racine d'ordre k de P avec $k \geqslant 3$.

   ii. On pose $P(X) = (X-a)^k R(X)$, avec $k \geqslant 3$ et $R(a) \neq 0$. Montrer que P est propre pour Φ si et seulement si R est un polynôme constant, la valeur propre correspondante valant $k-2$.

   iii. En déduire les éléments propres de Φ.