Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On désigne par f l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = P(X+1) + P(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.
3. Justifier que f est bijectif.
4. Calculer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
5. Soit P un élément de E défini par :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

   (a) Expliciter en fonction des réels a_0, a_1, a_2, a_3 le polynôme $Q = f^{-1}(P)$.

   (b) On considère pour tout entier strictement positif n la somme :
   $$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k P(k)$$
   Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $(-1)^n$, de $Q(n+1)$ et de $Q(1)$.

   (c) Expliciter la valeur de $S(n)$ en fonction de n, a_0, a_1, a_2 et a_3.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E vérifiant :

$$f \circ f = 4f$$

Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - 4Id_E)$.