On considère une fonction f, continue sur $]0,+\infty[$, qui vérifie les hypothèses (H) suivantes :

$$(H)\ :\ \begin{cases} (i) & f(1)=0, \\ (ii) & f \text{ est dérivable en } 1 \text{ avec } f'(1)\neq 0, \\ (iii) & (x-1)f(x)>0 \text{ pour tout } x>0 \text{ et } x\neq 1, \\ (iv) & \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{f(x)} = 0 \end{cases}$$

On pose enfin, pour tout $x>0$ tel que $x\neq 1$,

$$G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{f(t)}dt$$

1. Montrer que G est ainsi bien définie. Quel est le signe de $G(x)$?
2. On pose $H(x) = \dfrac{1}{f'(1)} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} H(x)$.
   (b) Justifier que $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)f'(1)$.
   (c) Montrer que $H(x)-G(x)$ tend vers 0 quand $x\to 1$.
   (d) En déduire que G se prolonge pas continuité en 1 et donner la valeur λ permettant ce prolongement.
3. Montrer que G se prolonge par continuité en 0^+ par 0.
   On note $\widetilde{G}$ la fonction G ainsi prolongée en 0 et en 1.
4. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et donner l'expression de G' en fonction de f.
5. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ vérifie les hypothèses (H) de l'énoncé.
   Etudier alors les variations de la fonction $\widetilde{G}$ associée, en particulier la limite en $+\infty$ et la dérivabilité en 1.