

Khâgne 913 - DS 07

Samedi 23 Mars 2013 - 08h-12h

Let this last test be your best one.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais que nous noterons $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans le préliminaire et dans chacune des parties, par souci de simplification d'écriture.

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, celle-ci est noté $\mathbb{E}(X)$.

Question préliminaire

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité, dont les densités, notées respectivement f_X et f_Y , sont nulles sur $] - \infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$. On note F_X et F_Y leurs fonctions de répartition respectives.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F_Y(t)f_X(t)dt$ est convergente.

Dans la suite, on admet que si les variables aléatoires X et Y vérifient les conditions précédentes et sont de plus indépendantes, alors :

$$\mathbb{P}(Y \leq X) = \int_0^{+\infty} F_Y(t)f_X(t)dt.$$

Partie 1

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f nulle sur \mathbb{R}^{-*} et continue sur \mathbb{R}^+ . On note F sa fonction de répartition et G la fonction définie par : pour tout réel x , $G(x) = 1 - F(x)$.

On dit que X est **une variable aléatoire sans mémoire** si et seulement si, pour tout couple (x, y) de réels positifs, on a $G(x + y) = G(x)G(y)$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.
Vérifier que X est une variable aléatoire sans mémoire.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire, de densité f nulle sur \mathbb{R}^{-*} et continue sur \mathbb{R}^+ , et de fonction de répartition F . On pose toujours $G(x) = 1 - F(x)$.
 - (a) Justifier la dérivabilité de G sur \mathbb{R}^+ .
 - (b) En considérant, pour x et h positifs, $h \neq 0$, le rapport $\frac{G(x+h) - G(x)}{h}$, montrer que pour tout réel x positif, on a $G'(x) = G'(0)G(x)$, où G' désigne la dérivée de la fonction G .
 - (c) On pose $G'(0) = -a$ et, pour tout réel x positif, $H(x) = e^{ax}G(x)$. Montrer que H est une fonction constante sur \mathbb{R}^+ .
 - (d) En déduire finalement que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

3. On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.
- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ , indépendante de Y , et de densité continue sur \mathbb{R}^+ .
Montrer, à l'aide de la question préliminaire, que $\mathbb{P}(Y > X) = \mathbb{E}(e^{-\lambda X})$.
 - Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à densité, indépendantes et indépendantes de Y , à valeurs dans \mathbb{R}^+ et de densité continue sur \mathbb{R}^+ .
Exprimer $\mathbb{P}(Y > X_1 + X_2)$ en fonction de $\mathbb{P}(Y > X_1)$ et de $\mathbb{P}(Y > X_2)$.
 - Quelle propriété se trouve ainsi généralisée ?

Partie 2

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.

On définit alors la variable aléatoire N égale au premier indice n , s'il existe, tel que $X_n > X_0$, et on pose $N = 0$ si un tel indice n'existe pas. Autrement dit, $N = \inf\{n \geq 1 / X_n > X_0\}$ si cet ensemble est non vide, et $N = 0$ si cet ensemble est vide.

- On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* , $Z_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω , on a :
 $Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$. On admet que Z_n est une variable aléatoire.
Déterminer la fonction de répartition de Z_n .
- Vérifier que $(N = 0) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (Z_n \leq X_0)$.
- On rappelle que si (A_n) est une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire vérifiant, pour tout n de \mathbb{N} ,
 $A_{n+1} \subset A_n$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
En utilisant ce résultat et le résultat admis dans la question préliminaire, calculer $\mathbb{P}(N = 0)$.
- Exprimer, pour tout n de \mathbb{N}^* , l'événement $(N > n)$ à l'aide d'événements faisant intervenir Z_n et X_0 .
- Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la valeur de $\mathbb{P}(N > n)$, puis celle de $\mathbb{P}(N = n)$.
- La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Partie 3 (Cette partie est indépendante des parties 1 et 2)

- Soit X une variable aléatoire réelle, à valeurs positives, de densité f continue sur \mathbb{R}^+ et dont la fonction de répartition est notée F .
On suppose qu'il existe un réel α strictement supérieur à 1 tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha(1 - F(t)) = 0$.
Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt$.
- On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1, et on pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $U_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω , $U_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$. On admet que U_n est une variable aléatoire.
Déterminer la fonction de répartition de U_n .
En déduire, sans calcul, son espérance et sa variance.

3. Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p , avec $0 < p < 1$, et indépendante des variables aléatoires X_k ($k \in \mathbb{N}^*$). On pose $q = 1 - p$.
On pose, pour tout ω de Ω , $U(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega))$, et on admet que $U = \inf(X_1, X_2, \dots, X_N)$ est une variable aléatoire.
- Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathbb{P}(U > x)$.
 - À l'aide de la première question de cette partie, montrer que la variable aléatoire U admet une espérance et que celle-ci est donnée par : $\mathbb{E}(U) = \int_0^{+\infty} \frac{pe^{-t}}{1 - qe^{-t}} dt$.
 - À l'aide du changement de variable $u = e^{-t}$, dont on justifiera la validité, calculer $\mathbb{E}(U)$ en fonction de p et de q .

PROBLÈME 2

Dans tout ce problème, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n supérieure ou égale à 2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E . Si u est un élément quelconque de $\mathcal{L}(E)$:

- on pose $u^0 = Id_E$, et pour tout entier naturel j non nul, $u^j = u^{j-1} \circ u$;
- si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$, et on admet que pour tous polynômes P et Q de E , on a $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$;
- on note $\mathbb{R}[u] = \{P(u) / P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit **cyclique** si et seulement si il existe un vecteur a de E tel que la famille $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit une base de E .

Partie 1

Dans cette partie, u désigne un endomorphisme cyclique de E et $\mathcal{B} = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ une base de E .

On note $\mathcal{C}(u)$ le **commutant** de u , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec u . On a donc $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / v \circ u = u \circ v\}$.

- Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable pour la composition des endomorphismes.
 - Établir l'inclusion $\mathbb{R}[u] \subset \mathcal{C}(u)$.
- Soit v un élément de $\mathcal{C}(u)$.

(a) Justifier l'existence de n réels, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, tels que $v(a) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(a)$.

(b) On considère l'endomorphisme w défini par $w = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j$.

En comparant les images des éléments de \mathcal{B} par v d'une part, et par w d'autre part, montrer que $v = w$.

- Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$.
- Montrer que la famille $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.
 - Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

Partie 2

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : un endomorphisme de E diagonalisable est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

1. *Exemples.*

On suppose dans cette question que $n = 3$; on note $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E , et on considère les deux endomorphismes u et v dont les matrices dans la base \mathcal{F} sont respectivement :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que u et v sont deux endomorphismes cycliques.
- Déterminer les valeurs propres de u , et en déduire que u est diagonalisable.
- Déterminer les valeurs propres de v .
- Donner les dimensions des sous-espaces propres de v .
- L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

Jusqu'à la fin du problème, on revient au cas général où n est un entier quelconque, supérieur ou égal à 2.

2. Soit u un endomorphisme de E qui admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, et soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E formée de vecteurs propres de u , tels que, pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $u(e_j) = \lambda_j e_j$.

On considère le vecteur x défini par $x = \sum_{k=1}^n e_k$.

- Donner, pour tout p de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, l'expression de $u^p(x)$ dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) .

- Soient n réels a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , tels que $\sum_{p=0}^{n-1} a_p u^p(x) = 0$, et Q le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $Q = \sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p$.

Montrer que, pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $Q(\lambda_k) = 0$.

- Déduire de ce qui précède que u est un endomorphisme cyclique.

3. Dans cette question, on suppose que u est un endomorphisme diagonalisable admettant p valeurs propres distinctes, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, avec $p < n$. On pose $H(X) = \prod_{j=1}^p (X - \lambda_j) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$.

- Calculer $(H(u))(x_k)$ lorsque x_k est un vecteur appartenant au sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_k .
- Pour tout vecteur x de E , calculer $(H(u))(x)$. Quel est l'endomorphisme $H(u)$?
- En déduire, en utilisant les résultats de la partie 1, que u n'est pas un endomorphisme cyclique.

4. Conclure.

Partie 3

- Soit u un endomorphisme de E , nilpotent d'indice n , c'est-à-dire tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
 - Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une famille libre de vecteurs de E .
 - En déduire que u est un endomorphisme cyclique.
- On suppose que E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n-1$. On confondra polynôme et fonction polynomiale associée. On considère les deux endomorphismes D et Δ de E définis par : pour tout P de E , et pour tout x de \mathbb{R} , $(D(P))(x) = P'(x)$ et $(\Delta(P))(x) = P(x+1) - P(x)$, où P' désigne la dérivée de P .
 - En utilisant la question précédente, montrer que D est cyclique.
 - Montrer que Δ est un élément de $\mathcal{C}(D)$.
 - En déduire qu'il existe un polynôme Q tel que $\Delta = Q(D)$.
 - À l'aide de la formule de Taylor, exhiber un tel polynôme.