Khâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Vendredi 15 Février 2013 - 08h-12h

Le Compas glorieux se réveille en sursaut,
Ému de cette vue et d'un espoir si haut.
Il rend grâce au soleil, et ferme comme un Aigle
Le regarde et s'en va : Puis rencontre la Règle ;
Droite, d'un grave port, pleine de majesté,
Inflexible et surtout observant l'équité. (...)

Quoi ? dit-elle en riant, je serais la conquête
D'un amant qui n'aurait que les pieds et la tète ?
Toutefois nos amours, répliqua le Compas,
Produiront des enfants qui vaincront le trépas.
De nous deux sortira la belle Architecture,
Et mille nobles arts pour polir la nature. (...)

Le Compas aussitôt sur un pied se dressa,
Et de l'autre, en tournant un grand cercle traça,
La Règle en fut ravie, et soudain se vint mettre
Dans le milieu du cercle, et fit le diamètre.

Son amant l'embrassa, l'ayant à sa merci,
Tantôt s'élargissant et tantôt raccourci,
Et l'on vit naître alors de leurs doctes postures
Triangles et carrés, et mille autres figures.

Charles Perrault, *Les amours de la Règle et du Compas et ceux du Soleil et de l'Ombre* (extrait).

Les deux problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans l'ensemble du présent sujet, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes.
Il est demandé de numéroter soigneusement les réponses.

Enfin, le jury rappelle qu'il sera fait grand cas de la qualité et de la précision de la rédaction lors de la notation.

PROBLÈME 1

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n}[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.
On rappelle que la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^{2n})$ est une base de E.

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini par $Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, on définit le polynôme $S(Q)$ par :

$$S(Q)(X) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k.$$

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en "inversant l'ordre des coefficients". Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q(X) = 4X^4 + 7X^2 + 2X^2 + 1$, on obtient $S(Q)(X) = X^4 + 2X^2 + 7X + 4$.

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes.

PARTIE 1

1. Montrer que l'application $s : Q \longmapsto s(Q)$ est un endomorphisme de E.
2. **Cas particulier :**
   (a) On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Déterminer les valeurs propres de M et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé. La matrice M est-elle diagonalisable ?
   (b) Vérifier que dans le cas particulier $n = 1$, M est la matrice de l'application linéaire s dans la base $(1, X, X^2)$. Donner alors une base de vecteurs propres pour s.
3. **Cas général :**
   On définit la famille de polynômes $(A_0, \ldots, A_{2n})$ par :
   $$\begin{cases} A_k(X) = X^{2n-k} + X^k & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-1, \\ A_n(X) = X^n, & \\ A_k(X) = X^k - X^{2n-k} & \text{si } n+1 \leqslant k \leqslant 2n. \end{cases}$$
   (a) Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$.
   (b) En déduire que les valeurs propres de s appartiennent à $\{1, -1\}$.
   (c) Déterminer $s(A_k)$ pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2n$.
   (d) Montrer que la famille $(A_0, \ldots, A_{2n})$ est libre.
   (e) En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

PARTIE 2

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $[\![1, p]\!]$.
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que, pour tout polynôme Q de Ω, l'on a $\mathbb{P}(\{Q\}) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$.

Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q **et** $s(Q)$ **présentent** i **coïncidences** lorsqu'il existe exactement i entiers $k \in [\![0, 2n]\!]$ qui vérifient $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire Z qui, à tout polynôme Q de Ω, associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$.

Par exemple, pour $n = 2$*, si* $Q(X) = X^4 + 7X^3 + 2X^2 + 5X + 1 = \sum_{k=0}^{4} a_k X^k$*, on a* $Z(Q) = 3$ *car* $a_0 = a_4$*,* $a_2 = a_2$ *et* $a_4 = a_0$*.*

4. **Description d'un cas simple :**
   Dans cette question, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.
   Écrire tous les éléments de Ω, puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.

5. **Cas général :**
   On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.
   (a) Calculer le cardinal de Ω.
   (b) Montrer que la plus petite valeur que peut prendre Z est 1 et justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbb{P}([Z = 1]) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n.$$
   (c) Montrer que la plus grande valeur que peut prendre Z est $2n + 1$ et justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbb{P}([Z = 2n + 1]) = \frac{1}{p^n}.$$
   (d) Montrer que Z ne peut prendre que des valeurs impaires et, pour un entier j vérifiant $0 \leqslant j \leqslant n$, calculer $\mathbb{P}([Z = 2j + 1])$.
   (e) On pose $Y = \dfrac{Z-1}{2}$. Montrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   En déduire l'espérance et la variance de Z en fonction de n et de p.

PROBLÈME 2

Les parties 2 et 3 sont indépendantes, mais utilisent toutes deux les résultats de la partie 1.

PARTIE 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$g_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-tx} dt.$$

   (a) Justifier que, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-tx} dt$ est bien définie.

   (b) Pour $x > 0$, trouver une relation de récurrence entre $g_n(x)$ et $g_{n+1}(x)$.
   En déduire la valeur de $g_n(x)$ pour $x > 0$.

   (c) Montrer que g_n est dérivable et vérifier que, pour tout $x > 0$, on a $g_n'(x) = -g_{n+1}(x)$.

2. Soit β un nombre réel strictement positif. On définit la fonction f par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\beta^2} e^{-t/\beta} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Vérifier que f est la densité d'une variable aléatoire.
   On considérera dans la suite une variable aléatoire X qui admet f comme densité, on dit que X suit une **loi gamma de paramètre** β, notée $\gamma(\beta)$.

   (b) On appelle **mode de** X, s'il existe, un réel t_0 tel que : pour tout t réel, $f(t) \leqslant f(t_0)$.
   Déterminer le (ou les) mode(s) de X.

   (c) Montrer que la fonction de répartition de X, notée F, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis la calculer.

   (d) Tracer la courbe représentative de F (on cherchera ses points d'inflexion éventuels et l'on étudiera F au voisinage de zéro en précisant la tangente et la position de la courbe par rapport à cette tangente).

   (e) Déterminer l'espérance de X et sa variance.

3. Soient α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$.
   Soit X_α une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètre α, on notera f_α sa densité et F_α sa fonction de répartition. Soit X_β une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètre β, on notera f_β sa densité et F_β sa fonction de répartition.

   (a) On appelle $\mathcal{C}_\alpha$ (respectivement $\mathcal{C}_\beta$) la courbe représentative de f_α (respectivement de f_β). Déterminer la position relative de ces deux courbes.

   (b) Même question pour les courbes représentatives de F_α et de F_β.

4. (a) Soit h la fonction définie par $h(u) = \mathbb{E}(e^{uX})$. Pour quelles valeurs de u, h est-elle définie ? Calculer alors $h(u)$ et vérifier que $h'(0) = \mathbb{E}(X)$.

   (b) Déterminer la densité de la variable aléatoire $Y = e^{-X}$ et calculer son espérance.

PARTIE 2

5. Y désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :
   $$\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y \geqslant k) - n\mathbb{P}(Y \geqslant n+1).$$
   (b) On suppose que Y suit une loi géométrique de paramètre p et on pose $q = 1-p$.
   Déduire de la question 5 (a) que pour tout $q \in]0,1[$,
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

6. Soit X une variable aléatoire continue, positive, admettant une densité g. Si x est un réel, on note $[x]$ la partie entière de x et l'on définit la variable aléatoire Z par $Z = [X]$.
   (a) Déterminer la loi de Z à l'aide de la fonction g.
   (b) Montrer que Z possède une espérance si et seulement si X en possède une, et que dans ce cas : $\mathbb{E}(Z) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Z) + 1$.

7. *Application :* X est une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètre $\beta = 1$.
   (a) Déterminer l'espérance de Z où $Z = [X]$.
   (b) Déterminer la loi de Z.

PARTIE 3

8. La durée du processus d'atterrissage d'un avion est le temps T, mesuré en minutes, qui s'écoule depuis la prise en charge par la tour de contrôle jusqu'à l'immobilisation de l'avion sur la piste. Dans un certain aéroport, on estime que T est une variable aléatoire réelle continue, suivant une loi gamma de paramètre $\beta = 0,25$.
   (a) Quelle est la durée moyenne du processus d'atterrissage ?
   (b) Quelle est la probabilité pour que T soit inférieur à 4 minutes 30 secondes sachant qu'il dépasse 3 minutes ?

9. On suppose que n avions atterrissent successivement sur cet aéroport, que les durées d'atterrissage de chacun d'entre eux suivent la loi T et sont indépendantes.
   (a) Soit Y la durée minimale d'atterrissage observée sur ces n avions.
   Déterminer la loi de Y.
   (b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'avions dont le temps d'atterrissage est supérieur à 3 minutes. Déterminer la loi de X.

10. Dans un autre aéroport, on estime que T est une variable aléatoire réelle continue, suivant une loi gamma de paramètre β inconnu. On supppose que m avions atterrissent successivement sur cet aéroport, que les durées d'atterrissage de chacun d'entre eux suivent la loi T et sont indépendantes. On note $T_1, T_2, \ldots, T_m$ la durée d'atterrissage de chacun de ces m avions.
    Pouvez-vous proposer un estimateur sans biais de β ?