Le devoir comporte trois problèmes indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 3 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1

Partie A

On note $(c_n)_{n\geqslant 1}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$$

1. Montrer que $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de réels positifs.
2. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, on a la relation : $c_{n+1} + c_n = \dfrac{1}{n}$.
3. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 la double inégalité :
$$\frac{1}{n} \leqslant 2c_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$
En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.
4. La série de terme général c_n converge-t-elle ?
5. Calculer c_1 et montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)$$

Partie B

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{1}{c_n\, t^n(1+t)} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$.

1. À l'aide d'un changement de variable, établir pout tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité :
$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\, dt = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\, du$$
2. En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite du problème, on suppose que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variable aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

3. Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1}.
4. Dans cette question exclusivement, on suppose que $n = 1$.
   (a) Préciser la fonction F_1.
   (b) En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbb{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   (c) Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.
5. Soit x un réel strictement supérieur à 1 fixé.
   (a) Justifier l'encadrement : $0 \leqslant \displaystyle\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}du \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire l'égalité suivante :
$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$$
6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$ si x est un réel inférieur ou égal à 1. Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.

Problème 2

Partie A

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.

1. Justifier que la fonction Φ admet une fonction réciproque G définie sur $]0,1[$. Préciser les variations de la fonction G.
2. Pour tout réel x, exprimer $\Phi(-x)$ en fonction de $\Phi(x)$. En déduire l'expression de $G(1-y)$ en fonction de $G(y)$ pour tout y de $]0,1[$.
3. Pour tout nombre réel strictement négatif x, établir l'encadrement suivant :

$$-\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \leqslant \Phi(x) \leqslant -\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{2\pi}}$$

   En déduire un équivalent de $\Phi(x)$ quand x tend vers $-\infty$, puis de $1-\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. On pose $x = G(y)$ pour $x < 0$ et $0 < y < \dfrac{1}{2}$.
   On note $H(y) = \dfrac{G^2(y)}{2} + \ln\left|G(y)\right| + \dfrac{\ln(2\pi)}{2}$.
   Montrer que $-H(y) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{G^2(y)}\right) \leqslant \ln(y) \leqslant -H(y)$.
   En déduire un équivalent de $G(y)$ quand y tend vers 0, puis quand y tend vers 1.

Partie B

À l'issue d'un scrutin uninominal permettant à plusieurs centaines de milliers d'électeurs de départager deux candidats A et B d'importance a priori comparables, on se propose, avant le dépouillement, de procéder à une estimation de la proportion p des voix obtenues par le candidat A.

À cet effet, on répète n fois ($n \geqslant 1$) l'expérience suivante : on retire "au hasard" un bulletin des urnes ; on note s'il est ou non en faveur de A et on le remet dans les urnes. On note X_n la variable aléatoire indiquant le nombre des suffrages favorables à A parmi les n bulletins dépouillés. Le quotient $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$ indique donc la proportion des suffrages favorables à A parmi ces n bulletins. On pose enfin :

$$u_n = \mathbb{P}\big(\ |Y_n - p| \geqslant 0,01\big)$$

Soit ε un nombre réel appartenant à $]0,1[$. L'objectif est de déterminer le nombre n de bulletins qu'il suffit de dépouiller ainsi pour que $u_n \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire pour connaître p à $0,01$ près avec un risque d'erreur inférieur à ε.

1. (a) Déterminer la loi de X_n. Calculer les espérances et les variances de X_n et de Y_n.
   (b) Montrer que $\mathbb{V}[X_n] \leqslant \dfrac{n}{4}$.
   (c) À l'aide de la Loi Faible des Grands Nombres que l'on énoncera, justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. *Première majoration de u_n*
   (a) En appliquant à X_n l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et en utilisant le résultat de la question 1(b), donner un majorant M_n de u_n ne dépendant que de n.
   (b) Comment suffit-il de choisir n pour que $M_n \leqslant \varepsilon$?
   Examiner les cas où $\varepsilon = 0{,}1$ et $\varepsilon = 0{,}05$.
3. *Seconde majoration de u_n*
   (a) En approchant X_n par la loi normale (on justifiera la mise en œuvre d'une telle approximation), montrer que :

$$u_n \approx 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\ 0{,}01}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\right)$$

   (b) En utilisant le résultat de la question 1(b), donner un majorant m_n de u_n ne dépendant que de n et de Φ.
   (c) En déduire que $m_n \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant 2500\left(G\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right)^2$.
   Examiner les cas où $\varepsilon = 0{,}1$ et $\varepsilon = 0{,}05$.
   On rappelle les valeurs approcheés suivantes : $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$ et $\Phi(1{,}64) \approx 0{,}950$)

Problème 3

Soit E un espace vectoriel qu'on suppose de dimension finie n. On note Id_E l'endomorphisme identité de E. Soit f un endomorphisme de E, différent de $2Id_E$ et différent de $-3Id_E$ vérifiant la relation $(\mathcal{R})$ suivante :

$$(\mathcal{R}) \ : \qquad f^2 + f - 6Id_E = 0$$

(où 0 représente l'endomorphisme nul de E, et f^2 désigne l'endomorphisme $f \circ f$).

1. Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de Id_E et de f.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par f et Id_E, c'est-à-dire :

$$F = Vect(\ Id_E,\ f)$$

   (a) Montrer que la famille (Id_E, f) est libre dans l'espace vectoriel des endomorphismes de E. En déduire la dimension de F.

   (b) Prouver que les endomorphismes u de F vérifiant la relation $u \circ u = u$, différents de l'endomorphisme nul et de l'identité de E, sont les endomorphismes p et q définis par :

$$p = \frac{1}{5}(2Id_E - f) \qquad q = \frac{1}{5}(3Id_E + f)$$

   (c) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

   (d) Établir que la famille (p, q) est une base de F.

   (e) Déterminer les coordonnées de f et de f^{-1} dans cette base (p, q).

   (f) Pour tout entier naturel k non nul, exprimer p^k en fonction de p.

   (g) Établir que, pour tout entier naturel n, f^n peut s'écrire comme combinaison linéaire de p et q. Donner les coordonnées de f^n dans la base (p, q).

   (h) Le résultat obtenu est-il encore valable pour tout entier relatif n ?

3. *Application.*
   Dans la suite du problème, $E = \mathbb{R}^3$, on note g l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -5 \\ 10 & 2 & -5 \\ 20 & 10 & -13 \end{pmatrix}$$

   (a) Justifier que g satisfait à la relation $(\mathcal{R})$.

   (b) Déterminer les valeurs propres possibles de A.

   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

   (d) On note P et Q respectivement les matrices associées à p et q dans la base canonique de E.
   Ecrire ces matrices et en déduire la matrice A^n pour tout entier relatif n.