Khâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Mardi 13 Novembre 2012 - 08h-12h

Un concours blanc de plus va m'offrir ses mystères
Et ses beaux sujets toujours aussi bien conçus.
Se préparent ainsi des jours assez austères,
Mais mon fin esprit saura prendre le dessus.

L'épreuve du mardi, loin d'être élémentaire,
Saura peut-être me montrer à son insu,
Toutes les connaissances que je ne peux taire,
Mes capacités jusqu'alors inaperçues.

Toujours je rendrai une des copies les plus belles,
Car pour être le mieux noté c'est essentiel,
Les maistres ne sont assurément pas des tendres.

Pourtant, je ferai de mon mieux sans aucun doute,
Car même si certaines questions me déroutent,
D'autres me permettront de bien me faire entendre.

Le devoir comporte deux exercices et un problème qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat. Le sujet est rédigé sur 4 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions numériques définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des fonctions φ de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui vérifient la relation $(*)$ suivante :

$$(*) \ : \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi''(x) = (1+x^2)\varphi(x).$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si u et v sont deux éléments de E, alors $u'v - v'u$ est une fonction constante.
3. Soit f la fonction définie, pour tout réel x par : $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.
   (a) Vérifier que f est élément de E.
   (b) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$.
   Montrer que g est élément de E.
4. (a) Soit h une solution de $(*)$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions h et f, que h est combinaison linéaire de f et de g.
   (b) Montrer finalement que (f,g) est une base de E.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est :
$$D =]-1,+\infty[.$$
   On admettra que la fonction f est continue sur D.
2. Montrer que f est décroissante sur D.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer pour tout x de D une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$.
4. En déduire que :
$$f(x) \underset{x\to -1^+}{\sim} \frac{1}{2(x+1)} \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x+1).$$
5. Soit $n = \mathrm{Ent}(x)$ (partie entière de x). Justifier que lorsque $x \to +\infty$, on a :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(n).$$
6. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{f(n-1)}{f(n)}\right)$.
7. En déduire que lorsque $x \to +\infty$, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} Cx^{-1/2}$, où C est une constante qu'on ne demande pas de déterminer.
   On pourra admettre le résultat suivant si besoin :
$$\exists \gamma \in \mathbb{R}\ /\ \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma.$$

PROBLÈME

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_n$ et on suppose que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \dots i$.
On s'intéresse au jeu suivant :

- au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r, alors on repose la boule dans l'urne U_n, puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.
- Plus généralement, pour tout entier k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne, puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne U_s.

On admet que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour tout entier naturel k, on pose les notations suivantes :

- Z_k est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k-ième tirage.
- On convient que $Z_0 = n$.
- F_k est le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \mathbb{P}(Z_k = r)x^r$.
- $\mathbb{E}[Z_k]$ désigne l'espérance de la variable Z_k.

1. À l'aide de la Formule des Probabilités Totales, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall r \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{i+1}.$$

2. Établir les deux formules suivantes, valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$:

$$(\mathcal{R}_1) \ : \qquad (n+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = n) = \mathbb{P}(Z_k = n),$$
$$(\mathcal{R}_2) \ : \qquad (r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) - (r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r+1) = \mathbb{P}(Z_k = r).$$

3. On admet dans cette question que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in [\![1, n]\!]$.

   On pose pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, $S_r = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_k = r)$.

   (a) En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n.

   (b) En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1}.

   (c) Montrer que la suite $(rS_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{S}) \ : \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir que $F'_k(1) = \mathbb{E}[Z_k]$ et que $F''_k(1) = \mathbb{E}[Z_k(Z_k - 1)]$.
   Exprimer alors la variance $\mathbb{V}[Z_k]$ de Z_k en fonction de $F'_k(1)$ et $F''_k(1)$.

   (b) En dérivant une fois, puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$.

   (c) Donner la valeur de $F'_k(1)$, $F''_k(1)$, puis de $\mathbb{V}[Z_k]$ en fonction de k et n.

Partie 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit le polynôme $g(P)$ de la manière suivante :

$$g(P)(X) = (X-1)P'(X) + P(X) = \big[(X-1)P\big]'(X).$$

Remarquons en particulier, que la relation $(\mathcal{S})$ démontrée à la question I-4 revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g(F_{k+1}) = F_k.$$

6. (a) Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$. Justifier que g est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   On notera dans la suite $f = g^{-1}$ son application réciproque.
   (c) Écrire la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que g est diagonalisable.
7. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$Q_k = (X-1)^k.$$

   (a) Justifier que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Calculer $g(Q_r)$ et $f(Q_r)$ pour tout $r \in [\![0, n]\!]$. En déduire que f est diagonalisable.
8. (a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^k(X^n) = F_k(X) = \sum_{r=0}^{n} \mathbb{P}(Z_k = r) X^r.$$

   (b) Justifier les égalités suivantes :

$$X^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} Q_r(X) \qquad \text{et} \qquad \forall r \in [\![0, n]\!],\ Q_r(X) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} X^j.$$

   (c) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^k(X^n) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} Q_r(X).$$

   (d) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, n]\!]$. À l'aide des questions précédentes, établir que :

$$\mathbb{P}(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

9. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Déterminer un réel $M_{n,j}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Big|\mathbb{P}(Z_k = j)\Big| \leqslant \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}.$$

   Justifier que la série $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in [\![1, n]\!]$.
10. Déterminer un réel C_n tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Big|\mathbb{P}(Z_k = 0) - 1\Big| \leqslant \frac{C_n}{2^k}.$$

   La série $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?