Le devoir comporte un exercice et trois problèmes indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 2 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice

Un sac contient 100 dés, dont 75 sont équilibrés et les 25 autres sont pipés de la manière suivante : quand on lance un dé pipé, on a une probabilité 1/2 d'obtenir la face 6, les autres faces étant équiprobables.

1. (a) On choisit un dé au hasard dans le sac et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?
   (b) On choisit un dé au hasard dans le sac, on le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
2. (a) On choisit un dé au hasard dans le sac et on le lance n fois ($n \geqslant 1$). Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins un 6 sur les n lancers ?
   (b) On choisit un dé au hasard, on le lance n fois ($n \geqslant 1$) et obtient uniquement des 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Problème 1

On rappelle que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On note $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on définit l'application ϕ_A par :

$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}.$$

Partie A - Diagonalisation de A

1. Calculer A^2.
   En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
2. Montrer que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation $A = PDP^{-1}$.
3. Donner l'écriture matricielle de P^{-1}.

Partie B - Diagonalisation de ϕ_A

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Établir que $\phi_A^3 = \phi_A$.
   En déduire les valeurs propres possibles de ϕ_A.
3. Montrer que la matrice M est un vecteur propre de ϕ_A associé à la valeur propre λ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle :
   $$DN - ND = \lambda N.$$
4. Déterminer l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation $DN - ND = 0$.
5. En déduire que la famille (A, B) avec $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, est une base du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(\phi_A)$ associé à la valeur propre 0.
6. On admet que ϕ_A admet deux valeurs propres non nulles.
   L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ?

Problème 2

1. (a) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 lorsque $x \to 0$ de $\ln(2 - e^x)$.
   (b) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $2 - e^{1/k} \in]0, 1[$.
   (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(2 - e^{1/k})$.
2. Pour $n \geqslant 2$, on pose : $V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(2 - e^{1/k})$ et $u_n = \exp(V_n)$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
   $$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right).$$
   (c) En déduire que la suite (nu_n) admet une limite finie strictement positive lorsque $n \to +\infty$.
   (d) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
3. On pose pour tout $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k$.
   (a) Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.
   (b) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont deux suites adjacentes.
   (c) En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Problème 3

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}\,dt.$$

1. (a) Montrer que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente et donner sa valeur.
   (b) En déduire que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2. (a) Vérifier que pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geqslant 0$, on a :
   $$xe^t \leqslant \sqrt{1 + x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$
   (b) Prouver que, pour tout réel $x > 0$, on a :
   $$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.$$
   (c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
3. (a) À l'aide du changement de variable $u = xe^t$ que l'on justifiera, montrer que pour tout $x > 0$, on a :
   $$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3} du.$$
   (b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et montrer que :
   $$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1 + x^2}}{x}.$$
   (c) Justifier que pour tout réel $x > 0$, on a :
   $$2f(x) = \sqrt{1 + x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1 + u^2}}.$$
   En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a :
   $$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1 + x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1 + u^2)^{3/2}} du.$$
   (b) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1 + u^2)^{3/2}} du$ converge.
   (c) Montrer que l'on a :
   $$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$
   (d) En déduire que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $f'(0)$.