Le devoir comporte six courts exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat. Chaque exercice est prévu à titre indicatif pour une durée approximative de 15-20 mn.

Le sujet est rédigé sur 1 seule page. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -10 & -6 \end{pmatrix}$. On admet qu'on a $(A+2I)^2 = 0$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admettant trois valeurs propres distinctes : λ_1, λ_2, λ_3.

1. Justifier que f est diagonalisable et déterminer la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Soit x un vecteur propre de f. Calculer $f(g(x))$ et en déduire que $g(x)$ est soit le vecteur nul, soit un vecteur propre de f.
   (b) Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.
   (c) En déduire que g est diagonalisable.

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ est convergente.
2. Calculer I à l'aide du changement de variable $u = e^x$.

Exercice 5

1. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge.
2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ converge.
3. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$ (on justifiera l'existence de l'intégrale I, et on utilisera le changement de variable $u = \sqrt{t}$).

Exercice 6

On pose pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. (a) Montrer que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$.
   (b) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} v_n$ diverge.
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge.
2. On pose pour $n \geqslant 1$, $\alpha_n = u_n \sqrt{n}$ et $\beta_n = \ln(\alpha_{n+1}) - \ln(\alpha_n)$.
   (a) Montrer que $\beta_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.
   (b) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \beta_n$ converge.
   (c) En déduire que la suite (α_n) converge.

*** *Fin du sujet* ***