Exercice : comparaisons sommes-intégrales

1. (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* : \dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a :
$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$$

   (c) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ quand $n \to +\infty$.

2. Soit α un réel strictement supérieur à 1.

   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, on a :
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

3. Soit f continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

   (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} f(k)$ converge $\iff \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.
   En cas de convergence, montrer qu'on a :
$$\int_2^{+\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

4. (Indépendante des précédentes).
   Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^\alpha$ où $\alpha > 0$ fixé.