Exercice

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$

1. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = -\ln x + c + \varepsilon(x)$ où c est une constante réelle que l'on ne calculera pas et ε une fonction qui tend vers 0 lorsque $x \to 0$.
3. Soit $0 < a < b$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$ converge et donner sa valeur en fonction de f.
   En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$ converge et donner sa valeur.
4. (a) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Trouver b pour que
   $$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   soit une densité d'une loi de probabilité.
   (b) Calculer alors l'espérance et la variance de cette loi.