Exercice

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit h une fonction réelle strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$, telle que $h(X)$ admet une espérance.
   Montrer que pour tout réel a, on a :
   $$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{h(a)}$$
2. Soit $p \in]0,1[$. On définit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Enfin, on pose $\forall n \geqslant 1,\ Y_n = \dfrac{1}{n} X_n$.
   En utilisant la loi des grandes nombres, montrer que la suite (Y_n) converge en probabilité vers une variable certaine à déterminer.
3. Soit a tel que $p < a < 1$.
   (a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$,
   $$\mathbb{P}(Y_n \geqslant a) \leqslant \left(\mathbb{E}(e^{\lambda Z_1})\right)^n e^{-an\lambda}$$
   où Z_1 est une variable suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
   (b) Pour $\lambda > 0$, déterminer la valeur de $\mathbb{E}(e^{\lambda Z_1})$.
   (c) En déduire que :
   $$\mathbb{P}(Y_n \geqslant a) \leqslant e^{-nh_p(a)}$$
   où $\forall x \in]0,1[,\ h_p(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{p}\right) + (1-x)\ln\left(\dfrac{1-x}{1-p}\right)$.
4. Soit a tel que $0 < a < p$. Déduire de ce qui précède que :
   $$\mathbb{P}(Y_n \leqslant a) \leqslant e^{-nh_p(a)}$$