

Exercice (Oral ENS 2012)

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f , que l'on suppose nulle sur $] -\infty, 0]$ d'une part, et continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$ d'autre part.

1. Justifier qu'il existe un unique réel m tel que :

$$\mathbb{P}(X \leq m) = \mathbb{P}(X > m) = \frac{1}{2}$$

Ce réel m est appelé la **médiane de X** .

2. On suppose que X admet une espérance, que l'on note μ .
Montrer qu'il existe alors un unique réel ℓ tel que :

$$\int_0^\ell tf(t)dt = \int_\ell^{+\infty} tf(t)dt$$

Ce réel ℓ est appelé la **médiale de X** .

3. Montrer que si X admet une médiane et une médiale, on a :

$$m < \ell$$

4. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Dans quel ordre alors se classent μ , m et ℓ ?