D'après HEC 2006 - Problème 2

Partie 1 Soit X une variable aléatoire à densité, dont une densité f est nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et continue sur $\mathbb{R}^+$; on note F la fonction de répartition de X.
On pose, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x (1 - F(t))dt - x(1 - F(x))$.
2. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt$ converge.
   (a) Déterminer les variations de φ sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Justifier le fait que φ admet une limite finie en $+\infty$, et en déduire que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(1-F(x)) = 0$, et en déduire que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [1 - F(t)]dt$.

Partie 2 Dans cette partie, $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé, et on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \sup(X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi, pour tout ω de Ω, $S_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

1. (a) Déterminer la fonction de répartition F_n de S_n.
   (b) En déduire que S_n est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité f_n de S_n.
2. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (1 - F_n(t))dt$ converge.
   (b) En déduire que S_n admet une espérance mathématique, notée $\mathbb{E}(S_n)$.

Partie 3 On pose, pour tout x de $\mathbb{R}^+$,

$$I_n(x) = \int_0^x F_n(t)dt \quad \text{et} \quad J_n(x) = \int_0^x tf_n(t)dt$$

1. (a) Établir, pour tout x de $\mathbb{R}^+$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la relation de récurrence :
$$I_n(x) = I_{n-1}(x) - \frac{1}{\lambda} \times \frac{F_n(x)}{n}.$$
   (b) En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$ et pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $I_n(x) = x - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k(x)}{k}$.
   (c) Pour tout x de $\mathbb{R}^+$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_n(x)$ en fonction de $F_n(x)$ et de $I_n(x)$.
   (d) En déduire à nouveau que $\mathbb{E}(S_n)$ existe et que :
$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
2. (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $\ln(n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1+\ln(n)$.
   (c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(S_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que la série de terme général $u_k = \dfrac{1}{k} + \ln(k) - \ln(k+1)$, pour k appartenant à $\mathbb{N}^*$, est convergente.
   (b) En déduire que la suite de terme général $\mathbb{E}(S_n) - \dfrac{1}{\lambda}\ln(n)$, pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, est convergente.