Exercice

Les questions 1,2,3 sont totalement indépendantes.

1. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) On pose $S_2 = X_1 + X_2$. Montrer que S_2 suit une loi de Poisson de paramètre 2λ.
   (b) Plus généralement, en posant pour tout $n \geqslant 1$,
   $$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$
   déterminer la loi de S_n.

2. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
   On pose $U = \min(X, Y)$.
   Déterminer la loi de U.
   Pouvait-on s'en douter ?

3. On lance successivement et infiniment une pièce truquée, qui donne Pile avec une probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité $q = 1 - p$.
   Soit j un entier naturel supérieur ou égal à 1, fixé pour toute la question. On note Z la variable aléatoire égale au rang d'apparition du j-ième Pile.
   (a) Déterminer la loi de Z.
   (b) Exprimer Z comme la somme de j variables aléatoires indépendantes de même loi que l'on précisera.
   En déduire que Z admet une espérance et la calculer.
   Quelle somme de série a-t-on démontré ?