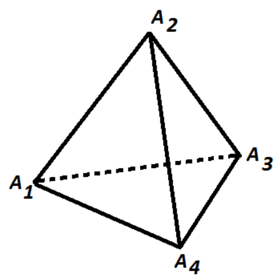
Exercice



Une coccinelle se déplace entre les quatre sommets A_1, A_2, A_3 et A_4 d'un tétraèdre.

À chaque instant, elle se déplace de l'un des sommets vers l'un quelconque des trois autres de manière équiprobable, sauf si elle se trouve au sommet A_4, auquel cas elle y reste (on peut considérer qu'elle se déplace de A_4 à A_4). A l'instant initial, la coccinnelle est en A_1.

On suppose qu'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélise cette expérience. Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur cet espace.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par la coccinelle à l'issue de son n-ième déplacement (on note $X_0 = 1$).

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$a_k = \mathbb{P}(X_k = 1),$$

$$b_k = \mathbb{P}(X_k = 2),$$

$$c_k = \mathbb{P}(X_k = 3),$$

$$d_k = \mathbb{P}(X_k = 4),$$

et Y_k la matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$Y_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}.$$

1. En utilisant la Formule des Probabilités Totales, déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ Y_{k+1} = AY_k.$$

2. Déterminer la loi de la variable X_2.
   Calculer son espérance et sa variance.
3. (a) Justifier les relations suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ d_{k+1} = \frac{2}{3}(d_k - 1) + 1,$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k+2} = \frac{1}{3}a_{k+1} + \frac{2}{9}a_k,$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ b_k = c_k.$$

   (b) En déduire la loi de X_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. En considérant $A - I_4$, $A - \frac{2}{3}I_4$ et $A + \frac{1}{3}I_4$ (où I_4 désigne la matrice identité d'ordre 4), justifier que A est diagonalisable.
5. Etudier la convergence des suites (a_k), (b_k), (c_k), (d_k).
   Interpréter le résultat obtenu.
6. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires pour que la coccinelle atteigne le point A_4 si elle l'atteint, et égale à 0 si elle ne l'atteint jamais.
   (a) Déterminer la loi de T.
   (b) Montrer que T admet une espérance, et que celle-ci est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T > j).$$

   Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}[T]$.