

Exercice

Le prof de maths se demande s'il va faire des interrogations surprises chaque semaine à ses élèves de B/L à partir de la rentrée des vacances de Toussaint.

Histoire de se déculpabiliser, il décide de s'en remettre au hasard et adopte la stratégie suivante :

La semaine numéro 1, il tirera au sort avec une pièce de monnaie équilibrée.

Puis, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il décide que s'il fait une interro la semaine numéro p , il n'en fera pas la semaine numéro $p + 1$, (trop de corrections ...). A l'inverse, s'il n'en fait pas la numéro p , il choisira pour la numéro $p + 1$ par tirage au sort.

1. (a) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'interrogation lors des n premières semaines ?
(b) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait jamais d'interrogation sur une infinité de semaines ?
2. Soit X le numéro de la semaine durant laquelle le prof fait sa première interrogation (on pose par convention $X = 0$ s'il n'y a finalement jamais d'interrogation).
Déterminer la loi de X .
Étudier si X admet une espérance et une variance, et si oui les calculer.
3. On note pour tout entier $p \geq 1$, a_p (resp. b_p) la probabilité qu'il y ait une interrogation la semaine numéro p (resp. qu'il n'y en ait pas).
(a) Pour tout entier $p \geq 1$, exprimer a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p .
(b) En déduire les expressions de a_p et b_p en fonction de p pour tout entier $p \geq 1$.