Exercice

Les questions 1,2,3 sont totalement indépendantes.

1. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

   (b) Démontrer que pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

   puis que :

$$\sin^2(a) - \sin^2(b) = \sin(a+b)\sin(a-b)$$

2. Montrer que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ convergent et qu'elles sont égales.

3. On pose pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

   (a) Justifier que f est bien définie et étudier la parité de f.

   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'.

   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f(x)$ admet une limite finie en $+\infty$.

   (d) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t) - 1}{t} dt = 0$.
   En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.