Exercice 1

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1}$ converge.
2. Calculer la valeur de I.

Exercice 2

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la **Trace de** A comme la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,k}$$

où pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, $[A]_{i,j}$ désigne le coefficient de A à la ligne i et la colonne j.

1. Déterminer la Trace de la matrice nulle et de la matrice I_n.
2. Montrer que l'application $\mathrm{Tr}\ : A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'application Tr est surjective.
4. Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}))$.
5. Soient deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Rappeler la valeur du coefficient $[AB]_{i,j}$ (présent en position (i,j) dans la matrice AB) en fonction des coefficients de A et B.
   (b) En déduire que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
6. On suppose que deux matrices M et N sont semblables. Montrer que $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(N)$.