Exercice (Ecricome)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les intégrales :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} dt \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} du$$

1. (a) Vérifier que : $\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in [0,1[$, on a :

$$\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}$$

En déduire que : $\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant u_n - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

(b) En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}$$

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$

(b) Pour $k \geqslant 1$, prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1} dx$.

3. On admet que :

$$\forall x \in]-\infty, 0],\ |e^x - e^{2x} + x| \leqslant \frac{3x^2}{2}$$

(a) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\left| v_n + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du \right| \leqslant \frac{3}{2n^2} \int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u} du$.

(b) Donner alors un équivalent de v_n, puis un équivalent de $u_n - \dfrac{1}{2}$ en fonction de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du$.