Khâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Samedi 03 Mars 2012 - 08h-12h

Les candidats téméraires, fiers khâgneux,
Partirent à l'aventure en ce jour de mars,
Découvrir bravement ce qu'on attendait d'eux,
Cette épreuve qui était loin d'être une farce.

Clarté, lisibilité, étaient de rigueur,
Tout autant que les qualités de rédaction,
Pour que, au bout de ces quatre dernières heures,
Ils puissent s'éclipser avec satisfaction.

Ils partaient cependant avec un avantage
Car de motivation, ils étaient bien pourvus.
Ils se lancèrent sans peur et avec courage,
Afin d'obtenir les points qui leur étaient dûs.

Auteur anonyme, XXI-ème siècle.

L'usage de la calculatrice est interdit.

L'exercice et le problème sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans chacun des deux exercices, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes, du moment qu'il l'aura clairement indiqué.
Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Exercice

On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

et on donne les valeurs approchées suivantes : $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \simeq 0.8$ et $e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.6$.

On note f la fonction définie par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \geqslant 0.$$

1. (a) Donner la définition d'une densité associée à une variable aléatoire réelle.
   (b) Montrer que la fonction f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Calculer les moments d'ordre 1 et 2 de X. En déduire la variance de X.
3. On considère les deux fonctions φ et ψ définies sur $[0,1]$ par :

$$\varphi(x) = \left(e^{-\frac{1}{2}} - 1\right) x + 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   et

$$\psi(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}(2-x)$$

   (a) Calculer $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$, $\varphi''(x)$ et $\psi''(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) Tracer le tableau de variations de chacune des deux fonctions φ et ψ sur $[0,1]$
   On montrera en particulier que la fonction φ atteint son minimum en un point $\alpha \in [0,1]$, sans chercher à calculer la valeur de α, ni celle de $\varphi(\alpha)$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\left(e^{-\frac{1}{2}} - 1\right) x + 1 \leqslant e^{\frac{-x^2}{2}} \leqslant e^{-\frac{1}{2}}(2-x)$$

   (d) En déduire un encadrement de la probabilité de l'événement $[0 \leqslant X \leqslant 1]$.
4. On admettra dans cette question que la probabilité de l'événement $[X \geqslant 2]$ a une valeur approchée à 4.5×10^{-2}. Donner un encadrement de la probabilité conditionnelle de l'événement $[X \geqslant 2]$ sachant que $[X \geqslant 1]$.

Problème

Le but de ce problème est d'étudier les variations du nombre d'exemplaires disponibles d'un livre (disons votre manuel favori d'économie) dans une bibliothèque. Le règlement de cette bibliothèque est le suivant : un livre emprunté au cours de la semaine numéro n doit impérativement être rendu à la fin de la semaine $n+1$, de sorte qu'il pourra être remis dans les rayons au début de la semaine $n+2$. On appelle N le nombre total d'exemplaires que possède la bibliothèque. On suppose que chaque semaine, un exemplaire disponible a (indépendamment de tout le reste) une probabilité $p \in]0,1[$ d'être emprunté. On suppose par ailleurs que tous les exemplaires empruntés à la semaine n sont rendus juste à temps : ils pourront tous être réempruntés à partir du début de la semaine $n+2$.

On note X_n le nombre de livres disponibles au début de la semaine n, et Z_n le nombre de livres empruntés au cours de la semaine n. On suppose qu'au début de l'année (pour $n=1$) ils sont tous disponibles.

Partie A - Préliminaires : suites arithmético-géométriques

Soient r et s deux nombres réels tels que $r \neq 1$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = ru_n + s \end{cases}$$

Soit $\ell = s/(1-r)$, on définit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par $v_n = u_n - \ell$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = rv_n$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{s(1-r^{n-1})}{1-r} + r^{n-1}u_1.$$

3. À quelle condition nécessaire et suffisante sur r, s et u_1 la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?

Partie B - Préliminaires probabilistes

Soit $N \geqslant 1$ un entier et soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble $[\![0,N]\!]$. Pour k dans $[\![0,N]\!]$, on appelle "Loi de X sachant $\{Y=k\}$" la loi de probabilité Q sur $[\![0,N]\!]$ donnée par :

$$\forall j \in [\![0,N]\!], \quad Q(j) = \mathbb{P}(X=j|Y=k)$$

Pour toute fonction $h : [\![0,N]\!] \to \mathbb{R}$, on appelle "espérance de $h(X)$ sachant $\{Y=k\}$" la quantité :

$$\mathbb{E}\left[h(X)|Y=k\right] = \sum_{j=0}^{N} h(j)\mathbb{P}(X=j|Y=k)$$

4. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[h(X)\right] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}\left[h(X)|Y=k\right]\mathbb{P}(Y=k).$$

Partie C - Étude en espérance

5. Expliquer avec des mots les relations
$$\begin{cases} X_1 = N, \\ \forall n \geqslant 1, \quad X_{n+1} = N - Z_n \end{cases}$$
6. Donner le nom et les paramètres de la loi de Z_n sachant $\{X_n = k\}$.
   Calculer $\mathbb{E}\left[X_{n+1}|X_n = k\right]$ pour tout $n \geqslant 1$.
7. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\mathbb{E}[X_{n+1}] = N - p\mathbb{E}[X_n]$.
8. Donner l'expression de $\mathbb{E}[X_n]$ en fonction de N, p et n. Quel est le comportement de la suite $(\mathbb{E}[X_n])_n$ quand n tend vers l'infini ?

Partie D - Le cas $N = 2$

Dans cette question, on étudie plus précisément le cas particulier où $N = 2$. On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :
$$A_{i,j} = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = i|X_n = j\right)$$
pour $0 \leqslant i, j \leqslant 2$. Attention : pour les besoins du problème, on numérote ici les lignes et les colonnes de 0 à 2 (et non de 1 à 3).

9. Donner l'expression de la matrice A en fonction de p.
10. Soit
$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$
   l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la dernière composante est égale à 1.
   Trouver trois vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathcal{E}$ tels que $Au_1 = u_1$, $Au_2 = -pu_2$ et $Au_3 = p^2u_3$.
11. Quel est l'ensemble des valeurs propres de A ? Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
12. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit
$$w_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$$
   Que vaut w_1 ? Montrer que $w_{n+1} = Aw_n$.
13. Soient a_1, a_2, a_3 les coefficients de w_1 dans la base $\mathcal{B}$, i.e. $w_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$.
   Montrer que $a_1 = (1 + p)^{-2}$.
14. De la même façon, on note $a_{1,n}$, $a_{2,n}$ et $a_{3,n}$ les coefficients de w_n dans la base $\mathcal{B}$.
   Montrer que les suites $(a_{1,n})_n$, $(a_{2,n})_n$ et $(a_{3,n})_n$ admettent des limites, notées respectivement a_1^*, a_2^* et a_3^*, que l'on calculera.
   Soit $w^* = a_1^*u_1 + a_2^*u_2 + a_3^*u_3$. Montrer que $Aw^* = w^*$.
15. Montrer que w^* définit une loi de probabilité, i.e. qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ telle que
$$w^* = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = 0) \\ \mathbb{P}(X = 1) \\ \mathbb{P}(X = 2) \end{pmatrix}$$
   Donner le nom et les paramètres de cette loi.

Partie E - Cas général : loi de X_n

On revient au cas général (N quelconque). On rappelle que par convention $0^0 = 1$.
Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction polynomiale G_n par la relation :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad G_n(s) = \mathbb{E}\left[s^{X_n}\right] = \sum_{k=0}^{N} s^k \mathbb{P}(X_n = k)$$

16. Donner l'expression de G_1.
17. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(X_n = 0) = G_n(0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = G'_n(0)$.
18. Plus généralement, on note $G_n^{(m)}$ la dérivée m-ième de G_n. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $m \geqslant 0$, on a
$$\mathbb{P}(X_n = m) = \frac{1}{m!} G_n^{(m)}(0),$$
où $m! = 1 \times 2 \times \cdots \times m$ désigne la factorielle de m, avec la convention $0! = 1! = 1$.
19. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel s,
$$\mathbb{E}\left[s^{Z_n} | X_n = k\right] = (1 - p + ps)^k,$$
puis que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $s \neq 0$,
$$\mathbb{E}\left[s^{X_{n+1}} | X_n = k\right] = s^N \left(1 - p + \frac{p}{s}\right)^k.$$
20. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $s \neq 0$,
$$G_{n+1}(s) = s^N G_n \left(1 - p + \frac{p}{s}\right).$$
21. Montrer qu'il existe une suite de réels $(q_n)_{n \geqslant 1}$ satisfaisant la relation de récurrence $q_{n+1} = 1 - pq_n$ et telle que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel s,
$$G_n(s) = (1 - q_n + q_n s)^N.$$
Donner l'expression de q_n en fonction de p et de n.
22. En utilisant la question 18, montrer que X_n suit une loi binomiale de paramètres N et q_n.
23. Montrer que la suite $(q_n)_n$ converge quand n tend vers l'infini. Quelle est sa limite ?
24. Discuter et comparer les conclusions obtenues aux questions 8, 15 et 23.