Le devoir comporte trois exercices qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 1 page.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

On considère la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \exp\left(-\exp(-x)\right)$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable X à densité. On précisera alors une densité de la variable X.
2. On considère la variable aléatoire $Y = \exp(-X)$.
   Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.
   En déduire que la variable aléatoire Y suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres.
   Quelle est l'espérance et la variance de Y ?

Exercice 2

Un bâton de longueur 1 et d'extrémités A et B est cassé en deux au hasard. La longueur L du morceau d'extrémité A suit une loi uniforme sur $[0, 1]$

1. On note X la variable aléatoire égale à la longueur du plus petit morceau, i.e. $X = \min(L, 1 - L)$.
   Déterminer la loi de X, et donner son espérance.
2. On note Y la variable aléatoire égale à la longueur du plus grand morceau, i.e. $Y = \max(L, 1 - L) = 1 - X$
   Déterminer la loi de Y, et donner son espérance.
3. On pose $Z = \dfrac{X}{Y}$. Déterminer une densité de Z.

Exercice 3

On rappelle que la densité d'une loi normale de paramètres m et σ^2 est :

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée réduite, de densité $f_{0,1}$. On définit alors la variable Y par

$$Y = e^X$$

et la variable Z par :

$$Z = a + bY$$

où a et b sont deux nombres réels.

1. Déterminer la fonction de répartition G de Y en fonction de celle de X, notée Φ.
2. En déduire une densité g de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.
   On rappelle que pour tous $x, \alpha \in \mathbb{R}$, $x^2 - \alpha x = \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}$
4. Calculer l'espérance et la variance de Z.