Le devoir comporte deux exercices et un problème qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 3 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$
- $\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\left([X = i] \cap [Y = j]\right) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

1. Quelle est la loi de X ?
2. Pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, calculer $b_{i,j} = \mathbb{P}_{[X=i]}(Y = j)$.
3. Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$. Montrer que $B^2 = B$.
4. Montrer que les seules valeurs propres possibles pour B sont 0 et 1.
5. Trouver les valeurs propres de B.

Exercice 2 (ENS 1998)

Un joueur lance à Pile ou Face une pièce telle que la probabilité d'obtenir *Face* lors d'un lancer soit $p \in]0,1[$. Il lance la pièce jusqu'à obtenir *Face* et compte le nombre X de lancers nécessaires. On considère que les lancers sont indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
   Calculer $\mathbb{P}(X > a)$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère n joueurs ($n \in \mathbb{N}^*$) jouant simultanément au jeu décrit ci-dessus, indépendamment les uns des autres. La probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir *Face* au cours d'un lancer est la même pour tous les joueurs. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que le joueur i obtienne *Face*.

2. Quelle est la loi de X_i ?
3. On pose $A_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
   Soit F_n la fonction de répartition de A_n.
   Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$,
   $$F_n(a) = 1 - (1-p)^{na}$$
   Quelle est la loi de A_n ?
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant 1$, on a :
   $$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1$$
   Comment interpréter ce résultat ?
4. On pose $B_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
   Soit G_n la fonction de répartition de B_n.
   Calculer $G_n(a)$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
   $$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = 0$$
   Comment interpréter ce résultat ?
5. Les variables aléatoires A_n et B_n sont-elles indépendantes ?

Problème (ENSAE 2002)

1. (a) Pour quelles valeurs de $q \in \mathbb{Z}$ la série $\displaystyle\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p^q}$ est-elle convergente ?

   En cas de convergence, on note $Z(q)$ sa somme.
   On admet que $Z(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

   (b) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on ait :
   $$\frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{(p+1)^2}.$$

   (c) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p(p+1)^2}$ et calculer la valeur de sa somme S.

2. (a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0. Prouver par récurrence sur n que :
   $$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) \right) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \qquad (1)$$
   où $f^{(p)}$ désigne la dérivée p-ième de f.

   (b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, on a :
   $$\left| e^x - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \right| \leqslant e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (2)$$

   (c) Pour $x \in [0,1[$, on pose $g(x) = \ln(1-x)$.
   Calculer la dérivée p-ième de g.

   (d) Soit $x \in [0,1[$ fixé.
   Étudier les variations de la fonction $\theta(t) = \dfrac{x-t}{1-t}$ sur l'intervalle $[0,x]$ et en déduire que :
   $$\left| \ln(1-x) + \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x}. \qquad (3)$$

3. Soit p et q deux entiers naturels. On désigne par $H_{p,q}$ la fonction définie, pour $x > 0$, par
   $$H_{p,q}(x) = x^p (\ln x)^q.$$

   (a) Étudier la convergence de l'intégrale
   $$I_{p,q} = \int_0^1 H_{p,q}(x)dx = \int_0^1 x^p (\ln(x))^q dx,$$

   (b) Pour tout entier naturel p, calculer $I_{p,0}$.

   (c) Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) pour lesquels elle converge, montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ est de la forme
   $$I_{p,q} = C_q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$$
   où C_q est un réel ne dépendant que de q, que l'on précisera.
   Vérifier que la suite $(C_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est bornée.

4. On pose :
   $$G(u) = \int_0^{+\infty} t^u e^{-t} dt.$$

   (a) Déterminer le domaine de définition D de la fonction G (on justifiera en détail la réponse).

   (b) Pour $x = n \in \mathbb{N}$, exprimer $G(n)$ à l'aide d'une intégrale de la forme $I_{p,q}$ et en déduire la valeur de $G(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Déterminer l'ensemble Q des valeurs de $q \in \mathbb{N}$ pour lesquelles on a convergence de l'intégrale

$$J_q = \int_0^1 \frac{(\ln(x))^q}{1-x} dx.$$

(b) Montrer que la fonction $\varphi(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1-x}$ peut être prolongée en une fonction bornée sur $[0,1]$.

(c) Montrer que, pour tous $q \in Q$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$J_q - \sum_{p=0}^{n} I_{p,q} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(\ln(x))^q}{1-x} dx. \qquad (4)$$

(d) Pour $q \in Q$, déduire de ce qui précède une expression de J_q à l'aide de la fonction Z.
En particulier, avec la valeur de $Z(2)$ fournie à la question 1.(a), quelle intégrale peut-on calculer ?

6. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de l'intégrale :

$$J'_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1-\ln(x)} dx.$$

(b) Peut-on exprimer cette intégrale à l'aide d'une série par une méthode analogue à celle de la question 5 ?

7. (a) Soit ψ la fonction $\psi(x) = x^{-x}$. Étudier la convergence de l'intégrale

$$K = \int_0^1 \psi(x) dx.$$

La fonction ψ peut-elle être prolongée en une fonction bornée sur $[0,1]$?

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| K - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} I_{p,p} \right| \leqslant \int_0^1 \psi(x) \frac{(-x\ln(x))^{n+1}}{(n+1)!} dx. \qquad (5)$$

En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^p} \qquad (6)$$

8. (a) Montrer que l'intégrale

$$L = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x) dx$$

est convergente.

(b) En utilisant entre autres la question 5.(b), montrer qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\left| L + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} I_{p,1} \right| \leqslant \frac{M}{n+1} \qquad (7)$$

En déduire une expression de L comme la somme d'une série puis la valeur de L.