Le devoir comporte quatre exercices qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 1 page.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages dans les conditions suivantes : si on tire une boule noire, on arrête, et si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule noire.

1. Déterminer la loi de X
2. Justifier sans calcul que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.
3. La variable X admet-elle une espérance?

Exercice 2

Soient $n \geqslant 1$ et $p \in]0, 1[$. Une machine choisit un nombre X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Chaque résultat de cette machine est affiché sur un écran défaillant :

- Si X n'est pas nul, l'écran affiche la bonne valeur
- Si X est nul, l'écran affiche au hasard une valeur entre 1 et n.

On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre affiché sur l'écran. Déterminer la loi de Y et son espérance.
(Pour le calcul de l'espérance, on fera apparaître l'espérance d'une loi usuelle).

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, vérifiant : $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \geqslant m) > 0$.
On suppose que X est une **variable sans mémoire**, autrement dit,

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{(X \geqslant m)}(X \geqslant n + m) = \mathbb{P}(X \geqslant n)$$

On pose $\mathbb{P}(X = 0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1. On pose $q = 1 - p$.
   Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.
2. Montrer que $\forall m, n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \geqslant n + m) = \mathbb{P}(X \geqslant m)\mathbb{P}(X \geqslant n)$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathbb{P}(X \geqslant n)$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X = n) = q^n p$.
4. (a) Reconnaître la loi suivie par la variable $X + 1$.
   (b) En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.

Exercice 4

Un dispositif de comptage dénombre les visiteurs qui entrent dans un musée. On note $X_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la variable aléatoire X_n qui donne le nombre de visiteurs ayant passé le portail entre les instants 0 et n.
On se place dans le cas où les variables sont telles que pour tous entiers $0 \leqslant m \leqslant n$, X_m et $X_n - X_m$ sont indépendantes, et $X_n - X_m$ suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha(n - m)$ (α est un réel strictement positif donné). Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, avec $0 \leqslant m \leqslant n$.

1. Quelle est la loi de X_m ? (On pourra remarquer que $X_m = X_m - X_0$).
2. Calculer $\mathbb{E}(X_m(X_n - X_m))$ puis $\mathrm{cov}(X_m, X_n)$.
3. Quelle est la loi du couple (X_m, X_n) ?
4. Pour $n \neq 0$, on pose $p = \dfrac{m}{n}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer la loi conditionnelle de X_m sachant que $[X_n = k]$, puis reconnaître cette loi.
5. On note N la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus petit entier $n > 0$ tel qu'il soit entré au moins un visiteur entre les instants 0 et n. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[N = n]$ en fonction de X_{n-1} et X_n, puis déterminer la loi de N, son espérance, sa variance.