Le devoir comporte quelques questions de cours et quatre exercices qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 2 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

<u>Pour les khûbes :</u> pas le droit d'utiliser les lois usuelles. Redémontrer les résultats.

Questions de cours

1. Rappeler la définition d'un système complet d'événements.
2. Enoncer la formule des Probabilités Totales.
3. Que veut dire : "Les événements A et B sont incompatibles" ?
4. Que veut dire : "Les événements A et B sont indépendants" ?
5. Soit X une variable aléatoire discrète.
   (a) Rappeler la définition de la fonction de répartition de X.
   (b) Donner l'allure rapide de sa courbe représentative (variations, limites, dessins).
   (c) Expliquer comment on peut retrouver la loi de X à partir du graphe de sa fonction de répartition.

Exercice 1

On a trois pièces truquées ; la première donne Pile avec probabilité 0.1, la deuxième avec probabilité 0.4, la troisième avec probabilité 0.6.
On choisit au hasard l'une des pièces et on la lance : on obtient Face. Déterminer la probabilité que l'on ait choisi la première pièce.

Exercice 2

Dans une fête foraine, un stand de loterie propose aux joueurs de tenter leur chance de la manière suivante.
On dispose de trois sacs S, T et U et n désigne un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 7$.

- Le sac S contient cinq boules : deux rouges, deux vertes et une jaune.
- Le sac T contient huit jetons : n marqués "1" et $8-n$ marqués "0".
- Le sac U contient huit jetons : $8-n$ marqués "1" et n marqués "0".

On notera $p = \dfrac{n}{8}$.

La personne qui veut tenter sa chance commence par tirer au hasard et simultanément trois boules du sac S.
Si le tirage est tricolore, elle tire au hasard un jeton du sac T et sinon, elle tire au hasard un jeton du sac U.

- Si le jeton tiré est marqué "1" (on note G_1 cet événement), elle remet ce jeton dans le sac d'où elle vient de le tirer et elle tire au hasard un jeton du sac T
- Si le jeton tiré est marqué "0", elle remet ce jeton dans le sac d'où elle vient de le tirer et elle tire au hasard un jeton du sac U.

La personne gagne si le dernier jeton tiré est marqué "1" et on désignera par G_2 l'événement : "La personne gagne".

1. Soit E l'événement : "Les boules tirées du sac S sont de trois couleurs différentes". Montrer que $\mathbb{P}(E) = \dfrac{2}{5}$.
2. Calculer en fonction de p les probabilités $\mathbb{P}(G_1)$ et $\mathbb{P}(G_2)$.
3. Montrer qu'il existe une et une seule valeur de n pour laquelle les événements G_1 et G_2 sont indépendants.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$

1. Justifier pourquoi X admet une espérance et donner l'expression de $\mathbb{E}[X]$.
2. Exprimer pour tout entier $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant k+1)$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k)$

Exercice 4

Soit $p \in]0, 1[$. On réalise une succession de lancers avec une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir Pile est égale à p, et celle d'obtenir Face est égale à $1 - p$.
Les différents lancers sont indépendants les uns les autres.
On pourra noter pour tout $i \geqslant 1$:

- P_i l'événement "La pièce donne Pile au lancer numéro i.
- F_i l'événement "La pièce donne Face au lancer numéro i.

On note X le numéro du premier lancer où un Pile apparaît.

1. Déterminer $X(\Omega)$
2. Calculer, pour tout $k \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.
3. Vérifier que $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
4. La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.