Khâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Samedi 05 Novembre 2011 - 08h-12h

Le candidat devra suivre les notations
Et l'ordre des questions que le texte utilise,
Il pourra se servir, sans justification,
Des réponses fournies et qu'il aura admises.

La rigueur du discours, la lisibilité,
L'orthographe soignée, la présentation claire,
Seront pour les copies de grandes qualités
Qui ne manqueront pas, au correcteur, de plaire.

Le candidat devra consacrer tout le temps
Imparti pour l'épreuve et qui est de quatre heures,
À ces trois exos et ce problème épatants,
Afin de les traiter de la façon meilleure.

Auteur anonyme, XII-ème siècle.

Le devoir comporte trois exercices et un problème qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.
Le sujet est rédigé sur 5 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = x - x^2$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle à définir.

Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ \forall n \geqslant 1,\ x_n < 0 \text{ et } x_n - x_n^2 = x_{n-1} \end{cases}$$

2. Montrer que la suite (x_n) est bien définie. Déterminer x_1 et x_2.
3. Étudier la convergence de la suite (x_n).

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = x_{n+1} - x_n, \qquad v_n = \ln(1 + u_n), \qquad w_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k)$$

4. (a) Étudier la convergence de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et déterminer sa somme éventuelle.
   (b) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge et donner un majorant de sa somme.
   (c) Montrer que la suite (w_n) admet une limite ℓ et que $2 \leqslant \ell \leqslant 9$.

Exercice 2

Soit a un nombre réel positif ou nul. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (k + a)} \quad (n \geqslant 1)$$

où $\prod_{k=1}^{n} x_k$ désigne le produit $x_1 x_2 \cdots x_n$.

1. On suppose que $a \in [0, 1]$. Montrer que

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n \geqslant \frac{1}{n+1}$$

   En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

2. On suppose à présent que $a > 1$ et on note

$$\forall n \geqslant 2, S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

   (a) Établir la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ S_{n-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1} u_n$$

   (b) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
   (c) Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a-1}$

Exercice 3

On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$ à coefficients réels.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés.

1. (a) Montrer que l'on a :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$$

$$\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$$

   (b) Montrer que si le produit AB est inversible, alors les matrices A et B sont inversibles.

2. Soit λ un réel non nul;

   (a) Montrer que la matrice $(\lambda I - AB)$ est inversible si et seulement si la matrice $(\lambda I - BA)$ l'est.

   (b) On suppose dans cette question que λ n'est pas valeur propre de la matrice AB. Montrer que l'on a alors :

$$(\lambda I - AB)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda} A(\lambda I - BA)^{-1} B$$

   après avoir justifié que ces expressions sont bien définies.

3. Montrer que les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

4. On considère les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   Calculer, après avoir justifié son existence, l'inverse de la matrice $I - MN$.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle la définition suivante :
Si P est un polynôme de degré n à coefficients réels défini par :

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$$

Alors, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $P(M)$ la matrice définie par le polynôme matriciel :

$$P(M) = a_0I_n + a_1M + a_2M^2 + \cdots + a_{n-1}M^{n-1} + a_nM^n$$

1. **Etude de l'application Trace**

   Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(A)$ désigne la trace de la matrice A, c'est-à-dire la somme des éléments de la diagonale de A. Si on note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors

   $$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

   (a) Montrer que l'application Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

   (b) Prouver que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

   (c) On suppose que A et D sont deux matrice semblables. Montrer qu'alors :

   $$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$$

Dans toute la suite du problème, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ayant n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ réelles distinctes. On pose :

$$P(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

L'objet de ce problème est de fournir une méthode permettant de déterminer les coefficients du polynôme P associé à la matrice A et, lorsque la matrice A est inversible, de calculer son inverse.

2. (a) Montrer que

   $$\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

   (b) Plus généralement, montrer que

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

(c) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

On considère le système linéaire dont les inconnues sont $u_1, u_2, \ldots, u_n$, défini par les n équations suivantes :

$$\begin{cases} S_1 + u_1 = 0 \\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ S_k + u_1 S_{k-1} + u_2 S_{k-2} + \cdots + u_{k-2} S_2 + u_{k-1} S_1 + k u_k = 0 \end{cases}$$

i. Justifier que le système précédent admet une solution unique.

ii. Vérifier que :

$$\begin{cases} u_1 = -S_1 = a_{n-1} \\ u_2 = -\dfrac{1}{2}\left(S_2 + u_1 S_1\right) = a_{n-2} \end{cases}$$

On admet pour la suite que la solution du système est le n-uplet des coefficients du polynôme P. Plus précisément, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $u_k = a_{n-k}$.

3. (a) Montrer que $P(A) = O_n$.

   (b) Prouver que l'équivalence :

   $$A \text{ inversible } \iff a_0 \neq 0$$

   Montrer que la matrice A^{-1}, lorsqu'elle existe, s'écrit comme un polynôme en A.

4. **Étude d'une suite de matrices**.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit les matrices B_k et les réels d_k par :

   $$\begin{cases} d_1 = -\mathrm{Tr}(A) \\ B_1 = A + d_1 I_n \\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ d_k = \dfrac{-1}{k}\mathrm{Tr}(B_{k-1}A) \\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ B_k = B_{k-1}A + d_k I_n \end{cases}$$

   (a) Établir que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = A^k + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}$.

   (b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculer le réel d_k en fonction de $\mathrm{Tr}(A^i)$ pour $i \in [\![1, k]\!]$ et de d_i pour $i \in [\![1, k-1]\!]$.
   En déduire que :

   $$d_k = a_{n-k}, \qquad \text{puis que } B_n = O_n$$

   (c) Prouver que

   $$A \text{ inversible } \iff d_n \neq 0$$

   Exprimer A^{-1} lorsqu'elle existe en fonction de B_{n-1} et d_n.

5. **Application**. On donne la matrice :

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Vérifier que les valeurs propres de A sont $1, 3, 5$.

   (b) Prouver que A est inversible et utiliser la méthode étudiée ci-dessus pour calculer A^{-1}.