Le devoir comporte un exercice et un problème qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 2 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Les résultats énoncés dans le sujet non démontrés par le candidat pourront être admis et librement utilisés dans les questions suivantes.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On considère dans cet exercice l'application $p : E \to E$, un **projecteur** de E.
On rappelle que cela signifie que p vérifie les propriétés suivantes :
- p est linéaire,
- $p \circ p = p$,
- $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$.

1. On définit
$$\operatorname{Inv}(p) = \{x \in E \;/\; p(x) = x\}$$
Montrer que $\operatorname{Inv}(p) = \operatorname{Im}(p)$
2. Soit u un endomorphisme de E.
On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable par** u si
$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F$$
Montrer que
$$\operatorname{Im}(p) \text{ et } \operatorname{Ker}(p) \text{ sont stables par } u \iff u \circ p = p \circ u$$

Problème

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On note I_3 la matrice identité de E et f l'endomorphisme de E dont la matrice associée dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie 1 - Etude de f

1. Calculer $(A - I)(A - 2I)^2$.
2. Déterminer les valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de l'endomorphisme f, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
3. La matrice A est-elle inversible ?
(On ne demande pas la matrice A^{-1}).
4. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de f.
5. Justifier que f n'est pas diagonalisable.
6. Déterminer un vecteur u_1 de E vérifiant :
   - $f(u_1) = \lambda_1 u_1$
   - La première composante de u_1 est 1.
7. Déterminer un vecteur u_2 de E vérifiant :
   - $f(u_2) = \lambda_2 u_2$
   - La deuxième composante de u_2 est 1.
8. Soit $u_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.
9. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1$ qu'on notera P, puis la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_0$.
10. Montrer que $f(u_3) = u_2 + 2u_3$.
11. En déduire la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
12. Rappeler la relation matricielle entre A et T.

Partie 2 - Matrices commutant avec A

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3. On considère le sous-ensemble $C(A)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ contenant toutes les matrices M telles que

$$AM = MA$$

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On garde les notations de la partie I pour les matrices P et T.
   Pour M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $M' = P^{-1}MP$. Montrer que
   $$AM = MA \Longleftrightarrow TM' = M'T$$
3. Montrer qu'une matrice M' de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $TM' = M'T$ si et seulement si M' est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, où a, b, c sont trois réels.
4. En déduire que M appartient à $C(A)$ si et seulement s'il existe des réels a, b, c tels que
   $$M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$
5. Déterminer alors une base de $C(A)$ ainsi que la dimension de $C(A)$.

$* * ** $ *Fin du sujet* $* * **$