Problème - ENS 2011

Thèmes : Algèbre. Réduction.

Soit $k \geqslant 1$ un entier. on dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est **stochastique** si

$$\forall i, j \in [\![1, k]\!],\ M_{i,j} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, k]\!],\ \sum_{j=1}^{k} M_{i,j} = 1$$

Soit $J = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$, le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

Partie A - Matrices stochastiques en dimension 2.

Soient $p, q \in [0, 1]$. On considère dans cette partie la matrice

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de P en fonction de p et q.
2. La matrice P est-elle diagonalisable ?
3. Pour quelles valeurs réelles λ existe-t-il une matrice stochastique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant λ pour valeur propre ?

Partie B - Propriétés élémentaires des matrices stochastiques

4. Soit $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) M est stochastique.
   (ii) $MJ = J$ et les coefficients de M sont tous positifs ou nuls.
5. Montrer que si M est stochastique, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, M^n est stochastique.
6. Montrer que si M est stochastique et si λ est une valeur propre réelle de M, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

Partie C - Matrices ayant un vecteur propre donné

Soit $X \in \mathbb{R}^k$ un vecteur non nul. On note

$$E_X = \{M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) \ / \ X \text{ est un vecteur propre de } M\}$$

7. Montrer que E_X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
8. On définit l'application

$$\varphi_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ A & \longmapsto & AX \end{array}$$

   Montrer que φ_X est une application linéaire.
9. Déterminer le rang de φ_X.
10. Montrer que $E_X = \mathrm{Ker}(\varphi_X) \oplus Vect(I_k)$, où $Vect(I_k)$ désigne la droite vectorielle engendrée par la matrice identité de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
11. Quelle est la dimension de E_X ?
12. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base du noyau de l'application linéaire :

$$F_X : Y \in \mathbb{R}^k \longmapsto {}^tYX = \sum_{i=1}^{k} X_i Y_i \in \mathbb{R}$$

   Déterminer, à l'aide $\mathcal{B}$, une base de E_X.

Partie D - Description de l'ensemble des matrices stochastiques

13. On rappelle que $J = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$. Déterminer une base de E_J lorsque $k = 2$.
14. Déterminer une base de E_J pour $k \geqslant 2$ quelconque. Comment peut-on décrire l'ensemble des matrices stochastiques ?