Problème 2 - ENS 2005

Thèmes : Analyse. Probabilités discrètes et continues.

L'épreuve d'ESSEC 2011 comportait en plus un problème d'analyse sur les séries, relativement court(DM07 pour le début)
Durée totale recommandée pour ce problème : 2h30

Soit Ω un ensemble (par exemple $\mathbb{R}$).
On rappelle que pour tout sous-ensemble A de Ω, la fonction $\mathbb{1}_A$ est la fonction qui va de Ω dans $\mathbb{R}$ et telle que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
On a donc en particulier pour toute variable aléatoire X à valeurs dans Ω, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)) = \mathbb{P}(X \in A)$.
On rappelle que si B est un deuxième sous-ensemble, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

1. Soit g une fonction continue non identiquement nulle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que g vérifie la relation suivante :

$$\forall (s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad g(s+t) = g(s)g(t)$$

   (a) Montrer que $g(0) = 1$.

   (b) Montrer que pour tout entier $q \geqslant 1$, $\left(g\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q = g(1)$ et en déduire que $g(1)$ est non nul.

   (c) Montrer que pour tout entier p et tout entier $q \geqslant 1$,

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = (g(1))^{p/q}$$

   (d) On rappelle que pour tout réel x, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$. Montrer qu'il existe un réel λ que l'on précisera tel que pour tout nombre réel positif x, $g(x) = \exp(-\lambda x)$.

2. Soit X une variable aléatoire positive à densité. On définit la fonction de queue de X, G_X, par la relation suivante :

$$\forall s \in \mathbb{R}, G_X(s) = \mathbb{P}(X > s)$$

   On rappelle qu'une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est une variable aléatoire de densité $\lambda \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{x\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}$.
   On dit qu'une variable aléatoire positive est **sans mémoire** si et seulement si la relation suivante est vraie

$$\forall (t,s) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \mathbb{P}(X > t+s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

   Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires (à densité ou discrètes). On rappelle que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si on a pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$,

$$\mathbb{P}(X_1 \leqslant a_1, \dots, X_n \leqslant a_n) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant a_1)\mathbb{P}(X_2 \leqslant a_2)\dots\mathbb{P}(X_n \leqslant a_n).$$

   (a) Calculer la fonction de queue, G_X, de X quand X est une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

   (b) Montrer que si X est une variable exponentielle de paramètre λ, alors X est sans mémoire.

   (c) Montrer réciproquement que si X est sans mémoire, alors X est une variable exponentielle dont on précisera le paramètre.

   Indication : on pourra commencer par trouver une relation vérifiée par la fonction de queue G_X.

   (d) Soient X_1 et X_2 deux variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Calculer la fonction de queue de la variable aléatoire $Z = \min(X_1, X_2)$ et donner la loi de Z.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires positives indépendantes de densités respectives f_X et f_Y. On admet alors que $S = X + Y$ est aussi une variable aléatoire positive dont la densité peut se calculer par la formule suivante :

$$\forall t \geqslant 0,\ f_S(t) = \int_0^t f_X(t-s) f_Y(s) ds.$$

Soit λ un réel positif. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{t \geqslant 0}$$

   (a) Montrer que f_n est une densité.

   (b) Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
   Montrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a pour densité f_n.

4. Dans une usine, on met en service une machine en commençant par mettre une batterie neuve sur cette machine, puis on change la batterie, dès que celle-ci s'arrête et on remplace la batterie épuisée par une neuve, de manière instantanée. Ce processus se poursuit indéfiniment. On modélise la durée de vie d'une batterie par une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les durées de vie des différentes batteries sont toutes indépendantes entre elles.
On note T_1, la date du premier changement de batterie depuis la mise en service de la machine. De manière plus générale, pour tout entier n, on note T_n la date à laquelle la n-ième batterie s'épuise et est remplacée.
Soit t un réel positif. On note $N(t)$, le nombre de batteries épuisées depuis la mise en service de la machine jusqu'au temps t inclus.

   (a) Soit n un entier non nul. Montrer que T_n est une variable aléatoire positive dont on donnera la densité.

   (b) Pour tout entier non nul n, montrer que les événements $\{N(t) \geqslant n\}$ et $\{T_n \leqslant t\}$ sont identiques. On note leur probabilité p_n.

   (c) Trouver une relation de récurrence entre les p_n.

   (d) Pour tout entier n, calculer la probabilité de $\{N(t) = n\}$. En déduire la loi de $N(t)$ (on donnera son nom et la valeur des paramètres).

5. On suppose que λ, t et s sont des réels strictement positifs. Soient X et Y deux variables aléatoires positives indépendantes de densités respectives f_X et f_Y. On admettra que pour toute fonction bornée, g, du couple (X, Y),

$$\mathbb{E}\left(g(X,Y)\right) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g(x,y) f_X(x) dx \right) f_Y(y) dy$$

   (a) Soit S_n la variable de densité f_n et τ une variable exponentielle de paramètre λ indépendante de S_n. En appliquant la formule ci-dessus à des fonctions indicatrices bien choisies, montrer que

$$\mathbb{P}\left(S_n + \tau > s + t \text{ et } S_n \leqslant s\right) = \frac{\lambda^n}{n!} s^n e^{-\lambda(s+t)}$$

   On notera la probabilité précédente q_n.

   (b) En conservant la modélisation précédente sur les batteries, soit $N(s)$ le nombre de batteries épuisées jusqu'au temps s inclus. Soit Z la première date après s (non inclus) à laquelle une batterie est épuisée.
   Montrer que $\mathbb{P}(Z > t + s \text{ et } N(s) = n) = q_n$.

   (c) En se servant des fonctions de queue, montrer que $Z - s$ est une variable exponentielle de paramètre λ et qu'elle est indépendante de $N(s)$.

   (d) Montrer que $N(t + s) - N(s)$ est une variable de Poisson de paramètre λt et qu'elle est indépendante de $N(s)$.