Problème 2 - ESSEC 2011

Thèmes : Algèbre linéaire. Probabilités discrètes et continues.

L'épreuve d'ESSEC 2011 comportait en plus un problème d'analyse sur les séries, relativement court(DM07 pour le début)
Durée totale recommandée pour ce problème : 2h30

Définitions et notations

Dans ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels.
Pour a et b réels, on note $M_{a,b}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux valent a et les autres coefficients valent b.
On note en particulier $I = M_{1,0}$ et $J = M_{1,1}$.
Ce problème est constitué de trois parties indépendantes si on admet les résultats de la partie 1.

Partie 1 - Étude de $M_{a,b}$

1. Justifier que le rang de J est 1 et donner une matrice colonne E_1 telle que (E_1) soit une base de l'image de J.
2. Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(J) \oplus \mathrm{Im}(J)$ (c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(J)$ et $\mathrm{Im}(J)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
3. En déduire que J est diagonalisable et donner une base $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de J.
4. Pour a et b réels, exprimer $M_{a,b}$ à l'aide de a, b, I et J.
5. Justifier que les valeurs propres de $M_{a,b}$ sont exactement :
   $\lambda = a - b \quad \text{et} \quad \mu = a + (n-1)b$
   La matrice $M_{a,b}$ est-elle diagonalisable ?

Dans toute la suite de ce problème, X et Y désignent deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même univers Ω et suivant la même loi. On suppose de plus que X et Y possèdent une espérance et une variable et on notera $E = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ l'espérance commune à X et Y, ainsi que $V = \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y)$ la variance commune à X et Y.
On note $M_{X,Y}$ l'application de Ω dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad M_{X,Y}(\omega) = M_{X(\omega),Y(\omega)}$$

Pour $\omega \in \Omega$, on note $\lambda(\omega) = X(\omega) - Y(\omega)$ et $\mu(\omega) = X(\omega) + (n-1)Y(\omega)$ les valeurs propres de $M_{X(\omega),Y(\omega)}$.
Les probabilités qui interviennent dans la suite, en particulier celles utilisant $M_{X,Y}$ ne font intervenir que les lois de X et de Y.

Partie 2 - Probabilités associées à $M_{X,Y}$

1. Justifier que les fonctions λ et μ définies sur Ω par $\omega \mapsto \lambda(\omega)$ et $\omega \mapsto \mu(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles.
2. Dans cette question, X et Y suivent une loi géométrique de paramètre p dans $]0,1[$. En utilisant les valeurs propres de $M_{X,Y}(\omega)$, déterminer la probabilité que $M_{X,Y}$ soit inversible.
3. Calculer la covariance de (λ, μ) en fonction de la variance V de X. Justifier que si $n > 2$, les variables aléatoires λ et μ ne sont pas en général indépendantes.

Partie 3 - Une loi commune

On pourra utiliser <u>sans démonstration</u> les résultats suivants :

- une fonction de la variable réelle à valeurs complexes se dérive ou s'intègre formellement comme une fonction à valeurs réelles ; les théorèmes usuels de l'analyse utilisés dans ce problème sont encore valable pour une fonction à valeurs complexes.
  Par exemple, si x est un réel, on note $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ et la dérivée de e^{ix} est $ie^{ix} = i\cos(x) - \sin(x)$.

- si U est une variable à densité admettant une espérance et une variance et si φ est la densité de U supposée continue ici, on appelle **fonction caractéristique de** U la fonction f_U définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_U(x) = \mathbb{E}(e^{ixU}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu}\varphi(u)du$$

(avec $i \in \mathbb{C}$ vérifiant $i^2 = -1$).
Cette fonction est deux-fois dérivable à dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées sont obtenues en dérivant sous le signe intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'_U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} iue^{ixu}\varphi(u)du = i\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{ixu}\varphi(u)du$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''_U(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{ixu}\varphi(u)du$$

- si $x \in \mathbb{R}$, le conjugué de $f_U(x)$ est

$$\overline{f_U(x)} = \mathbb{E}(e^{-ixU}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\varphi(u)du$$

- Si deux lois U et V sont indépendantes, et si a et b sont deux réels,

$$f_{aU+bV} = f_{aU}f_{bV}$$

- deux variables aléatoires réelles ayant la même fonction caractéristique, suivent la même loi.

4. Dans cette question, U désigne une variable à densité admettant une espérance et une variance. Que vaut $f_U(0)$? Exprimer l'espérance et la variance de U à l'aide de f'_U et de f''_U.
5. Dans cette question, U suit une loi normale centré d'écart-type σ.
   (a) Rappeler la densité de U.
   (b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour x réel,
   $$f'_U(x) = -x\sigma^2 f_U(x)$$
   (c) Déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto f_U(x)\exp\left(\dfrac{x^2\sigma^2}{2}\right)$ et en déduire f_U.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que X suit une loi à densité continue sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe α réel positif tel que X et $\alpha\lambda = \alpha(X-Y)$ ont même loi. On suppose de plus que la variance V de X est non nulle. On se propose de trouver la loi de X.

6. En calculant l'espérance de $\alpha\lambda$, montrer que l'espérance E de X est nulle.
7. En utilisant une variance, montrer que $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
8. Montrer que pour tout x réel,
   $$f_X(x) = f_X\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\overline{f_X\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} = \left|f_X\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right|^2$$
   Ainsi, f_X est à valeurs réelles positives.
9. On suppose qu'il existe x réel tel que $f_X(x) = 0$.
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_X\left(\dfrac{x}{(\sqrt{2})^n}\right) = 0$ et, par un passage à la limite, aboutir à une contradiction.
   Ainsi, f_X ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
10. Justifier que la fonction $g = \ln \circ f_X$ est définie deux-fois dérivable sur $\mathbb{R}$, à dérivée seconde continue.
11. En utilisant la question 8, montrer que pour x réel
   $$g''(x) = g''\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$
   et en déduire que g'' est constante sur $\mathbb{R}$.
12. En déduire que $f_X(x)$ est de la forme $\exp(ax^2)$ où a est une constante réelle.
13. Déterminer la loi suivie par la variable X.