Problème 1 - HEC 2010

Thèmes : suites, séries, comparaisons série-intégrales, développements limités.

L'épreuve d'HEC 2010 comportait en plus de ce problème d'analyse un problème mêlant algèbre et probabilités discrètes
Durée totale recommandée : 2h30

Dans tout le problème, on considère les suites $(H_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour tout entier naturel n non nul, par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = H_n - \ln(n)$$

Partie 1

1. Etablir pour tout entier naturel k non nul, l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2. (a) Quelle est la limite de la suite (H_n) ?

   (b) En utilisant le résultat de la question 1, montrer pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

   (c) En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.

3. (a) En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question 1, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

   (b) En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.

4. Soit f une fonction définie et deux-fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, dont les dérivées première et seconde sont notées respectivement f' et f''. On suppose que f'' est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   On pose pour tout entier naturel k non nul :

$$J_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)dt$$

   (a) Établir pour tout entier naturel k non nul, l'égalité suivante :

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)dt$$

   (b) En déduire pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   (a) Établir pour tout entier naturel k non nul, la double inégalité suivante :

$$0 \leqslant J_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3} dt$$

   (b) En déduire que la série de terme général J_k est convergente.

   (c) En déduire également, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leqslant \frac{1}{8n^2}$$

   (d) Prouver l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$, de limite nulle, telle que l'on ait pour tout entier naturel n non nul :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

Partie 2

6. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant les deux conditions suivantes :
   (i) la série de terme général a_n est convergente ;
   (ii) $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ (a_n est équivalent à b_n lorsque n tend vers $+\infty$).
   (a) Soit ε un réel strictement positif. Justifier l'existence d'un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon b_n$.
   (b) En déduire pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, l'inégalité suivante :
   $$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$
   (c) Établir l'équivalence suivante :
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$
7. Soit α un réel strictement supérieur à 1.
   (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :
   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}dt$$
   (b) En déduire pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier N strictement supérieur à n, la double inégalité suivante :
   $$\sum_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^\alpha}dt$$
   (c) Établir l'équivalence suivante :
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Partie 3

On considère les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ définies par :
$$\forall n \geqslant 1,\ x_n = u_n - \frac{1}{2n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2,\ y_n = x_n - x_{n-1}$$

8. (a) Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?
   (b) Justifier pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :
   $$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$$
   (c) En déduire pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :
   $$\gamma - x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$$
9. (a) Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon'_k)_{k\geqslant 1}$ convergente de limite nulle vérifiant :
   $$\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{\varepsilon'_k}{k^3}$$
   (b) Établir à l'aide d'un développement limité à l'ordre 3, l'équivalence suivante :
   $$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$
10. En utilisant les résultats précédents, en déduire l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon''_n)_{n\geqslant 1}$, de limite nulle, vérifiant pour tout entier naturel n non nul :
   $$H_n = \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}$$