Problème - ENS 2007

Thèmes : Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices.

L'épreuve d'ENS 2007 comportait en plus de ce problème d'algèbre un exercice d'analyse (continuité-dérivabililité, théorème de Taylor-Lagrange), un exercice de probabilités discrètes (convergence en probabilité d'un produit de variables de Bernoulli)
Durée totale recommandée : 2h30-2h45

Dans tout le problème, E désignera un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 1$, et u un endomorphisme de E. Pour un entier $k \geqslant 1$, u^k désigne u composé k fois,

$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{k \text{ termes}},$$

et u^0 est par convention l'endomorphisme identité de E. $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire u.

On dit qu'un endomorphisme u de E est **nilpotent** s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0_E$ (où 0_E désigne l'endomorphisme nul de E). Pour un tel u, on note ν son indice de nilpotence, c'est-à-dire le plus petit entier k strictement positif tel que $u^k = 0_E$:

$$\nu = \min\{k \geqslant 1 \ / \ u^k = 0_E\}.$$

De même, une matrice A est dite **nilpotente** si l'endomorphisme canoniquement associé est nilpotent, c'est-à-dire s'il existe un entier k tel que $A^k = [0]$ (où $[0]$ désigne la matrice nulle).

Partie 1 - Premiers exemples

1. Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont nilpotentes, mais que

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas.

2. Montrer que les matrices A et B sont respectivement semblables à :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple, (e_1, e_2, e_3) désignant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on pourra considérer respectivement les systèmes de vecteurs $(6e_1, 4e_1 + 3e_2, e_3)$ et $(5e_1, e_2, -6e_2 + 5e_3)$.

3. A et B sont-elles semblables ?

Partie 2 - Préliminaires (On ne suppose pas ici que u est nilpotent.)

1. Montrer les inclusions suivantes : $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(u^2), \operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Im}(u)$.
2. On souhaite caractériser les endomorphismes u pour lesquels E peut s'écrire comme somme directe de $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$:
$$E = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u).$$
   (a) Montrer que si $E = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Ker}(u)$, alors $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$.
   (b) Réciproquement, montrer que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$ implique $E = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Ker}(u)$, puis que cette somme est en fait directe.
   (c) Donner un exemple d'espace vectoriel E et d'endomorphisme u tels que $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ ne soient pas en somme directe.
3. Montrer qu'il existe n_0 tel que pour tout $k \geqslant n_0$,
$$\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{n_0}), \quad \operatorname{Im}(u^k) = \operatorname{Im}(u^{n_0})$$
   On note $K = \operatorname{Ker}(u^{n_0})$ et $I = \operatorname{Im}(u^{n_0})$.
4. Préciser I et K lorsque u est inversible.
5. Montrer que $E = K \oplus I$.

Partie 3 - Etude d'un second exemple Soit (dans cette partie uniquement) $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus $n-1$, $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel de tous les polynômes, et D l'application
$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k & \mapsto & D(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1} \end{array}$$

1. Montrer que D est un endomorphisme.
2. Préciser la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et écrire la matrice de l'application linéaire D sur cette base.
3. Déterminer, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, les espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(D^k)$ et $\operatorname{Im}(D^k)$.
4. D est-elle nilpotente ? Que donne ici la décomposition $E = K \oplus I$ vue à la question 4 de la partie 2 ?

Partie 4 Dans cette partie, on fixe un endomorphisme u non nul et nilpotent d'indice ν.

1. Montrer que $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de u ; l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Pour deux ensembles A et B, on note $A \underset{\neq}{\subset} B$ lorsque A est strictement inclus dans B, i.e. $A \subset B$ mais $A \neq B$.
   (a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$,
$$\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{k+1}) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Ker}(u^{k+1}) = \operatorname{Ker}(u^{k+2})$$
   et qu'il s'en suit que pour tout entier k,
$$\operatorname{Ker}(u^k) \underset{\neq}{\subset} E \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Ker}(u^k) \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker}(u^{k+1})$$
   (b) En déduire que pour tout entier $k \geqslant \nu$,
$$\{0\} \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker}(u) \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker}(u^2) \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker}(u^\nu) = \operatorname{Ker}(u^k) = E.$$
   (c) Prouver que $\nu \leqslant n + 1 - d \leqslant n$, où $d = \dim(\operatorname{Ker}(u))$ est la dimension de $\operatorname{Ker}(u)$.
   (d) Montrer que par ailleurs, $\nu \geqslant \dfrac{n}{d}$. À cet effet, indiquer préalablement pourquoi, pour tout entier k positif ou nul,
$$\dim(\operatorname{Im}(u^k)) = \dim(\operatorname{Im}(u^{k+1})) + \dim\Big(\operatorname{Im}(u^k) \cap \operatorname{Ker}(u)\Big)$$
   et sommer ces inégalités pour $k = 0, \dots, \nu - 1$.
   (e) Conclure que $\nu = n$ si et seulement s'il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\dim(\operatorname{Ker}(u^k)) = k$, et que dans ce cas, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\dim(\operatorname{Ker}(u^k)) = k$.

Partie 5 Dans cette partie, on fixe un endomorphisme u nilpotent d'indice ν, et on étudie ses représentations matricielles en fonction de la dimension n de l'espace E.

1. Dans le cas où $n = 2$, montrer que soit $u = 0_E$, soit u admet pour représentation matricielle
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
dans une base bien choisie. On pourra prouver l'existence de x tel que $u(x) \neq 0$ et montrer que $(u(x), x)$ est une base de E.
2. On traite maintenant le cas $n = 3$.
   (a) Rappeler pourquoi $\nu \in \{1, 2, 3\}$, et donner la valeur de u, ainsi qu'une représentation matricielle, lorsque $\nu = 1$.
   (b) Lorsque $\nu = 3$, montrer que u admet pour représentation matricielle
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   dans une base bien choisie. (On pourra montrer l'existence d'un élément $x \in E$ tel que $u^2(x) \neq 0$.)
   (c) Lorsque $\nu = 2$, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(\nu)) = 2$. En déduire que u admet pour représentation matricielle
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   dans une base bien choisie. Ici, on pourra considérer x tel que $u(x) \neq 0$ et exhiber une base de la forme $(u(x), x, y)$ pour y à préciser.
   (d) Déduire de ce qui précède que, pour tous réels non nuls a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, les matrices
$$C = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 2 & a_3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & a_4 & a_5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   sont respectivement semblables à
$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   C' et D' sont-elles semblables ?
3. Lorsque $n = 4$, traiter brièvement les cas $\nu \in \{1, 3, 4\}$ en s'inspirant des questions ci-dessus : donner à chaque fois la représentation matricielle de u dans des bases bien choisies, en termes d'une matrice avec des 0 et des 1.

   Dans le cas où $\nu = 2$, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2$ ou $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3$. Soit F un suppleméntaire de $\mathrm{Ker}(u)$; en considérant une base de F, montrer que u admet pour représentation matricielle dans des bases bien choisies :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ lorsque } \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2$$
$$\text{et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ lorsque } \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3$$