Exercice 1 (Oral ENS 2007)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.
2. Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ susceptibles d'être des extrema de f.
3. Soit $t > 0$ fixé. Etudier les extrema de F_t, où F_t est la restriction de f à la droite d'équation $y = tx$.
4. En déduire les extrema (absolus) de f.

Exercice 2 (Oral ENS 2011)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une application f est une *forme linéaire sur* E si c'est une application linéaire définie sur E à valeurs réelle. Soit F l'ensemble des formes linéaires sur E.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et préciser sa dimension.
2. Pour toute matrice $B \in E$, on définit l'application ϕ_B définie sur E par
$$\forall M \in E,\ \phi_B(M) = \operatorname{tr}(BM)$$
Montrer que $\varphi_B \in F$.
3. Montrer que l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ B & \mapsto & \phi_B \end{array}$$
qui à toute matrice $B \in E$, associe l'application ϕ_B, est une application linéaire.
4. Montrer que ϕ est bijective.