

Exercice 1 (Exercice 1 ENSAI 2007)

Partie A Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = \frac{1}{2} \sin(\pi x)$.

1. Calculer $f(0)$, $\int_0^1 f'(x)dx$ et $\int_0^1 |f'(x)|dx$.
2. Étudier les variations de f et en déduire son maximum.

Partie B Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = 0$,
 $\int_0^1 f'(x)dx = 0$ et $\int_0^1 |f'(x)|dx = 1$.

1. On suppose f croissante puis décroissante. Calculer le maximum de f .
2. Sans cette hypothèse, trouver une borne supérieure pour f .

Exercice 2 (Exercice 2 ENSAI 2007)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$$

On notera G l'ensemble des solutions de cette équation.

2. Rappeler la définition d'un groupe.
3. Montrer que, en adjoignant à G un nombre complexe bien choisi u , $G \cup \{u\}$ est un sous-groupe fini du groupe multiplicatif \mathbb{C} .