# Exercice 1 (Exercice 3 ENSAI 2004)

Dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on définit la matrice $T$ :

$$T = \begin{pmatrix} 2\cos^2(t) & 1 & 1+\cos(4t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & 2\sin^2(t) \end{pmatrix}$$

où $t$ est un paramètre réel quelconque.

1. Déterminer les valeurs propres de $T$ et les sous-espaces propres associés.
2. La matrice $T$ est-elle diagonalisable ?

# Exercice 2

On rappelle que pour réel $\theta$, le complexe $e^{i\theta}$ est défini par :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

On a donc $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$.

Montrer que pour tous réels $a$ et $b$ :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$