Exercice (Exercice ESSEC 2006)

Soit un réel a et n un entier supérieur ou égal à 3.
On considère $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On note $P^{(k)}$ la dérivée k-ième de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec comme convention $P^{(0)} = P$. D'autre part, on pose $0! = 1$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit le polynôme $f(P)$ par

$$f(P)(X) = (X-a)(P^{(1)}(X) + P^{(1)}(a)) - 2(P(X) - P(a))$$

1. Calculer $f(1)$, $f(X-a)$ et $f((X-a)^2)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul de degré d et de coefficient dominant c_d. Calculer $P^{(d)}$.
3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que
$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} P^{(m+1)}(t)dt.$$
5. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$
6. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que
$$f(P)(X) = \sum_{k=3}^{n} \frac{k-2}{k!} P^{(k)}(a)(X-a)^k.$$
7. En déduire les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?