Exercice (Oral ENS 2010)

Une action vaut initialement $X_0 = 1$ euro.
À chaque instant $n \geqslant 1$, sa valeur est multipliée par une quantité aléatoire Z_n.
On suppose que les variables Z_n sont indépendantes et de même lois, telles que :

$$\mathbb{P}(Z_n = 1 + a) = \mathbb{P}(Z_n = 1 - a) = \frac{1}{2},$$

avec a un réel vérifiant $a \in]0, 1[$.
On note X_n la valeur de l'action à l'instant n : ainsi, pour tout entier n strictement positif,

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k.$$

On pose $Y_k = \ln(Z_k)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien, et on définit pour tout entier naturel n, la variable

$$\overline{Y_n} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}[X_n] = 1$.
2. Exprimer $\mathbb{E}\left[\overline{Y_n}\right]$, puis $\mathbb{V}\left[\overline{Y_n}\right]$ en fonction de a et n.
3. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_n > -n\delta) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(X_n > \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

5. A-t-on $\mathbb{V}[X_n] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$?